Álgebra Linear (MA327) Teste 4 (09/06/2016)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

1. Seja $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. A transformada Fourier discreta unidimensional pode ser vista como um mapeamento $\mathcal{T} : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C})$ que satizfaz

$$[\mathcal{T}(f)](j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-\frac{2\pi kji}{n}}.$$

(Na prática, $\mathcal{T}$ se aplica à elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{R})$)

   (a) Porque podemos afirmar que $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C})$ é um espaço vetorial complexo?
   (b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$.
   (c) Mostre que $\mathcal{T}$ representa uma transformação linear.
   (d) Escolhe uma base de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C})$ (de preferência uma base simples) e escreve a matriz de $\mathcal{T}$ com respeito a esta base. Pode se mostrar que as colunas desta matriz formam um conjunto ortogonal. Com esta informação , o que pode se dizer sobre $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ e $Im(\mathcal{T})$?
   (e) Podemos afirmar que $\mathcal{T}$ é um isomorfismo? Neste caso, determine a matriz de $\mathcal{T}^{-1}$ com respeito à base escolhida de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C})$ para $n = 4$.
   (f) Considerando $\mathcal{T}$ como um mapeamento entre o espaço vetorial real $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C})$, visto como espaço vetorial real, qual seria $\mathcal{N}(\mathcal{T})$, $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{T}))$, $Im(\mathcal{T})$ e $\dim(Im(\mathcal{T}))$? Visto como espaço vetorial real, o que é $\dim(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_n; \mathbb{C}))$?