

MS211 - Turmas Y e Z - Teste 2 - Entrega: 13/10/2020

Nome:

RA:

1. Wassily Leontief recebeu o prêmio Nobel em Economia em 1973 por apresentar um modelo que descreve as relações inter-indústria numa economia, mostrando como a produção de um setor industrial pode se tornar um insumo para outro setor industrial.

Considere uma economia com  $n$  setores. Cada setor produz  $x_i$  unidades (monetárias) de um único bem homogêneo. Suponha que o  $j$ -ésimo setor, para produzir 1 unidade, deve usar  $a_{ij}$  unidades (monetárias) do setor  $i$ . Além disso, suponha que cada setor venda parte de sua produção para outros setores (produção intermediária) e parte de sua produção para os consumidores (produção final ou demanda final). Chame a demanda final no  $i$ -ésimo setor  $d_i$ . Então podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + d_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + d_2, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + d_n. \end{cases}$$

ou a produção total é igual à produção intermediária mais a produção ou demanda final. Se  $A$  é a matriz de coeficientes,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  é o vetor de produção total, e  $d = (d_1, \dots, d_n)^T$  é o vetor da demanda final, então a expressão para a economia passa a ser

$$x = Ax + d \Leftrightarrow (I - A)x = d,$$

sendo  $I$  a matriz identidade  $n \times n$ . Se  $M = I - A$  é invertível, então, este é um sistema linear possui uma solução única  $x^*$ . Assim, dado qualquer vetor de demanda final  $d$ , as produções necessárias podem ser encontradas. Sob certas condições, tem-se que  $x_i^* \geq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Considere agora a economia de um certo país que foi dividida nos dez setores da Figura 1.

Além disso, suponha que  $A$  é a matriz mostrada na Figura 2.

- (a) No caso do país em questão, uma unidade monetária corresponde a um bilhão de Euros. Suponha que o seu nome aparece como o  $k$ -ésimo na lista dos alunos no Google Classroom. Neste caso, seja  $d$  o  $k$ -ésimo vetor do arquivo *d-file*. Utilize o método da eliminação de Gauß em forma matricial (use o conceito de matriz aumentada) para encontrar  $x^*$ . Faça as contas com quatro dígitos decimais.
- (b) Interprete o resultado do Item (a).

Aggregated Sectoral Structure

Table 1

Sector Code	Sector Name	Branch codes (of the classification based on 105 branches) included in the respective sector
1	Agriculture, forestry, hunting and fishing	1...6
2	Mining and quarrying	7,9,11...17
3	Production and distribution of electric and thermal power	79...82
4	Food, beverages and tobacco	18...27
5	Textiles, leather, pulp and paper, furniture	28...33, 77
6	Machinery and equipment, transport means, other metal products	60...65, 67...76
7	Other manufacturing industries	34,35,8,36,38...59, 78
8	Constructions	83
9	Transports, post and telecommunications	87...91, 93...95
10	Trade, business and public services	84...86, 96...105

Figura 1: Setores da economia de um certo país.

Technical Coefficients Matrix (A)

Sector Code	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.433	0.002	0.000	0.209	0.058	0.000	0.001	0.001	0.000	0.009
2	0.000	0.302	0.239	0.001	0.000	0.009	0.087	0.007	0.000	0.006
3	0.017	0.087	0.208	0.044	0.034	0.036	0.073	0.015	0.034	0.034
4	0.042	0.001	0.003	0.358	0.012	0.003	0.007	0.003	0.007	0.095
5	0.012	0.006	0.002	0.035	0.242	0.017	0.025	0.038	0.008	0.063
6	0.053	0.075	0.023	0.024	0.034	0.242	0.046	0.047	0.086	0.059
7	0.124	0.091	0.270	0.066	0.098	0.189	0.410	0.159	0.077	0.131
8	0.006	0.006	0.004	0.004	0.005	0.003	0.003	0.153	0.006	0.016
9	0.010	0.031	0.007	0.025	0.025	0.025	0.023	0.006	0.077	0.039
10	0.033	0.069	0.041	0.064	0.091	0.068	0.055	0.124	0.152	0.199

Source: Authors' own computations.

Figura 2: A matriz  $A$  que determine as dependências entre os setores de um certo país e um certo ano.

2. Considere uma matriz invertível arbitrária  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sendo  $n > 2$ , e suponha que o método de fatoração LU pode ser aplicado sem problemas.
  - (a) Quantas divisões, multiplicações, adições e subtrações são respectivamente necessárias para determinar a matriz  $R^{(1)}$ ? Não conte as  $n-1$  subtrações  $a_{21} - m_{21}a_{11}, \dots, a_{n1} - m_{n1}a_{11}$ , onde  $m_{k1} = \frac{a_{k1}}{a_{11}}$  para  $k = 2, \dots, n$ . Porém, os fatores  $m_{k1}$  para  $k = 2, \dots, n$  precisam ser calculadas de qualquer forma.
  - (b) Seja  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ . Dado a matriz  $R^{(j-1)}$ , quantas divisões, multiplicações, adições e subtrações são respectivamente necessárias para determinar a matriz  $R^{(j)}$ ?
  - (c) Quantas divisões, multiplicações, adições e subtrações são respectivamente necessárias para obter a fatoração LU de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

3. O filtro de média, um filtro básico do processamento digital de imagens, pode ser expressado em termos de um produto matriz-vetor. Neste caso, uma imagem digital  $n \times n$  é representado como um vetor em  $\mathbb{R}^{n^2}$  e o filtro corresponde a uma matriz  $F$  de tamanho  $n^2 \times n^2$ .

Considere a matriz  $G \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  definida por

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in \{i - n, i - 1, i, i + 1, i + n\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n^2\}$$

Em seguida, seja  $n = 3$ .

- (a) Escreva a matriz  $G$ . Porque não é possível calcular a fatoração LU de  $G$  sem pivoteamento?
- (b) Calcule a fatoração LU com pivoteamento de  $G$  a mão, sem utilizar nenhum equipamento além da sua cabeça e uma caneta.
- (c) Utilize a fatoração LU com pivoteamento de  $G$  para determinar a fatoração LU com pivoteamento de  $F = \frac{1}{5}G$ . Justifique a sua resposta.
- (d) Suponha que o seu nome aparece como o  $k$ -ésimo na lista dos alunos no Google Classroom. Neste caso, seja  $b$  o  $k$ -ésimo vetor do arquivo  $b$ -file.

Utilize a fatoração LU com pivoteamento de  $F$  para resolver  $Fx = b$  a mão.

- (e) Suponha que você precisa resolver os 126 sistemas lineares da forma  $Fx = b^{(j)}$ , sendo  $b^{(j)} \in \mathbb{R}^{10}$ . Você utilizaria a fatoração LU ou a eliminação de Gauß para este propósito? Justifique a sua resposta.

Não é necessário entrar em detalhes, mas precisa-se esclarecer como se usa a fatoração LU e como se usa a eliminação de Gauß para resolver  $Fx = b^{(j)}$  para  $j = 1, \dots, 126$ . Comente sobre o esforço computacional exigido.