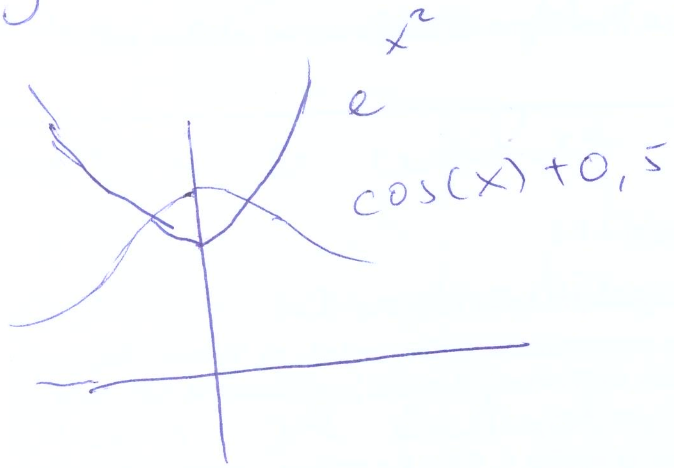
(a) $f(x) = e^{x^2} - \cos(x) - 0,5$

$f'(x) = 2x e^{x^2} + \operatorname{sen}(x)$



2 soluções

1

(b) $x = 0$

Passo de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

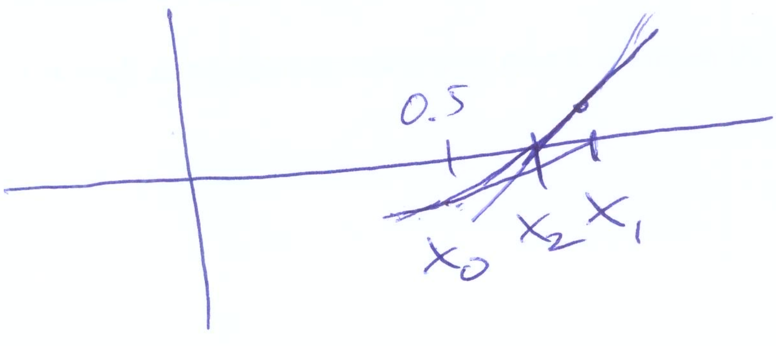
para $x_0 = 0$ temos $f'(x_0) = 0$

então execução do metodo não é possivel

1/2

$x = 0,5$:

$f(0.5) = -0.0939$



1/2

ALGUMAS TABELAS ÚTEIS

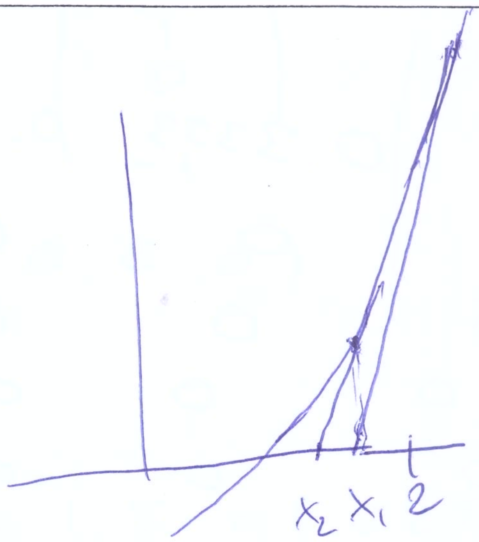
k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}$$

~~(a)~~ $x = 2$



1/2

(c) entre 0, 0,5 e 2
0,5 é mais apropriado

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - \cos(x_k) - 0.5}{2x e^{x_k^2} + \sin(x_k)}$$

porque

1/2

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	0,5	-0.0936 ~~-0,0936~~	~~-0~~ —
1	0.5531	~~-0.0936~~ 0.0069	

Resultado $\xi \approx$ ~~0.6~~ 0.5531

PARE

1

2.

(a)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.3333 & -0.25 & -0.2 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = 0.5 + 0.3333 + 0.25 + 0.2$$
$$= 1.2833 \geq 1$$

$\therefore$ O critério de Sassenfeld não é satisfeito

$\Rightarrow$ " das linhas " "

Então não temos garantias que GS vai convergir $\forall x^{(0)}$ para x^* com $Ax^* =$

e nem temos garantias que

GJ vai convergir $\forall x^0$ para x^* com $Ax^* =$

(b) $\underline{\underline{B = b}} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.7 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix}$ 1/2

$C =$

$$x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & -0.3333 & -0.25 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.$$

$$= -0.5 - 0.25 + 0.2 + 1.5 = -0.75 + 1.7$$
$$= 0.95$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.5$$

$$= -0.475 + 1.5 = 1.0250$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.0250 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.$$

$$= -0.3166 + 0.3 = -0.0166$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_4^{(1)} = (-0.25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.2$$

$$= -0.2375 + 1.25 = 1.0125$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_5^{(1)} = (-0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.$$

$$= -0.9900$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.025 \\ -0.0160 \\ 1.0125 \\ -0.9900 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

k	$x^{(k)}$	$d_2(x^{(k)}, x^{(k-1)})$
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	—
1	$\begin{pmatrix} 0.9500 \\ 1.0250 \\ -0.0166 \\ 1.0125 \\ -0.9900 \end{pmatrix}$	$\frac{0.05}{1.025} = 0.0488 < \varepsilon = 0.$

PARE

Resultado $x^* \approx x^{(1)}$

(c) $\det(A) = \det(LU) =$
$\det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot (1 \cdot 0.75 \cdot 0.8519 \cdot 0.90$
$\cdot 0.930$

$\neq 0$

Então A é posto completo

$\Leftrightarrow \exists!$ solução de $Ax = b$

(d) Visto o fato que dispomos de um bom chute inicial com $A x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.5500 \\ 1.5 \\ 0.3333 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix} \approx b$

e que ~~o sis~~ a matriz A é esparsa

e que aparentemente GS converge com $x^{(0)}$

para x^* com $Ax^* = b$

prefere-se utilizar GS

porque as matrizes L e U são

cheias de entradas não-zero

Nesta situação, o esforço computacional

para encontrar uma boa aprox da sol.

$\hat{x}$ de $Ax = b$ é menor com GS do que

com LU. Além disso GS é

numericamente estável porque os pequenos

erros em iterações anteriores não impactam.

1. a)

$A x = b$

ma método com 1,2 — $\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow L(Ux) = b$

1. $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3333 & -0.2222 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.1667 & -0.1304 & 1 & 0 \\ 0.2 & -0.1333 & -0.1047 & -0.08671 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0.3 \\ 1.25 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 1.5$

$0.75 + y_2 = 1.5 \Rightarrow y_2 = 0.75$

$0.5 \cancel{*} - 0.1667 + y_3 = 0.3 \Rightarrow y_3 = 0.3 - 0.$

$= -0.033$

$0.25 \cdot 1.5 - 0.1667 \cdot 0.75 + 0.1304 \cdot 0.0333 + y_4 =$

$0.375 - 0.1250 + 0.0043 + y_4 = 1.25$

$y_4 = 1.25 - 0.375 + 0.125 - 0.004$

$= 0.99757$

~~0.21~~

ALGUMAS TABELAS ÚTEIS

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$

---

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}$$

$0.2 \cdot 1.5 - 0.1333 \cdot 0.75 + 0.1043 \cdot 0.0333$

$- 0.0867 \cdot 0.9957 + y_5 = -0.8$

$0.3 - 0.1 + 0.0035 - 0.0863 + y_5 = -0.8$

$\Rightarrow y_5 = -0.9171$

$$2.\quad Ux = y = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,75 \\ -0.0333 \\ 0.9957 \\ -0.9171 \end{pmatrix}$$

1/2

$Ux = y = (1.5, 0.75, -0.0333, 0.9957, -0...$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\
0 & 0.75 & -0.1667 & -0.1250 & -0.1000 \\
0 & 0 & 0.8519 \quad \underline{-0.1111} & -0.1111 & -0.0889 \\
0 & 0 & 0 & 0.9022 & -0.0783 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.9306
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}
$$

$0.9306 x_5 = \cancel{4} -0.9171$

$\Rightarrow x_5 = -0.9855$

$\cancel{-0.9022 \cdot 0.9855 - 0.0783 x_4 = 0.9957}$

$\cancel{\Rightarrow x - 0.0783 x_4 = 0.9957 + 0.8891 =}$

$\cancel{1.8848}$

$\cancel{x_4 = 1}$

$0.9022 x_4 + 0.0772 = 0.9957$

$0.9022 x_4 = 0.9185 \Rightarrow x_4 = 1.0181$

$$0.8519x_3 - 0.1111 - 1.0181 + \overset{0.0876}{\cancel{0.1\ 0.0957}} = -0.0333$$

$$0.8519x_3 - 0.1\cancel{0}31 + \overset{0.0876}{\cancel{0.0996}} = -0.0333$$

$$0.8519x_3 = -0.0333 + 0.1131 - 0.0\overset{876}{\cancel{996}}$$

$$0.8519x_3 = -0.0\cancel{198}078$$

$$x_3 = -0.0092$$

$$0.75x_2 - 0.1667x_3 - 0.125x_4 - 0.1x_5 = 0.75$$

$$0.75x_2 + 0.0015 - 0.1273 + 0.0986 = 0.75$$

$$0.75x_2 = 0.7772 \Rightarrow x_2 = 1.0363$$

$$x_1 + 0.5x_2 + 0.3333x_3 + 0.25x_4 + 0.2x_5 = 1.$$

$$x_1 + 0.5182 + (-0.0031) + 0.2545 - 0.1971 =$$

$$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 0.5182 + 0.0031 - 0.2545 + 0.197$$
$$= 0.9275$$

$$\therefore X = (0.9275, 1.0363, -0.0092, 1.0181, \overset{-0.9855}{\cancel{0.9275}})$$

$\frac{1}{2}$