GABARITO

MS211 - Turma D - Prova 2 - 27/06/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Boa sorte!

1. Considere uma bola de tênis jogada para cima (tosse no saque). Seja $y(t)$ a altura da bola no tempo t e $t_0 = 0$. A equação diferencial que descreve este movimento é $my'' + by' = -mg$, sendo $m = 0.058$ (kg) a massa da bola, $b = 0.93$ (N) a força drag e $g = 9.81$ (m/s^2) a aceleração da gravidade.

   Considere o PVI seguinte:

$$\begin{cases} my'' + by' &= -mg, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 15 \end{cases} \Rightarrow y'' = -\frac{b}{m}y' - g = -16.0354\,y' - 9.81$$

   (a) Transforme este problema em um PVI vetorial. Use Y para denotar o vetor composto de y, y'. [0.5 pts]

   (b) Considere $h = 0.1$. Aplique o método de Heun, também conhecido com método de Euler Aperfeiçoado, e preenche todos os espaços marcados com ... da tabela seguinte: $\frac{1}{2}$

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} y'_k \\ -16.0354\,y'_k - 9.81 \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + hY'_k = \begin{pmatrix} \bar{y}_{k+1} \\ \bar{y}'_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{y}'_{k+1} \\ -16.0354\,\bar{y}'_{k+1} - 9.81 \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = \frac{Y'_k + \bar{Y}'_{k+1}}{2}$
0	$\begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ -250.3272 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 3.5 \\ -10.0327 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} -10.0327 \\ 151.0595 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 0.2484 \\ -4.9634 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$
0.1	$\begin{pmatrix} 2.2484 \\ 10.0366 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$				

Qual é a estimativa obtida da altura na qual a bola se encontra no tempo $t = 0.1$ s [2 pts]?

1.(a) $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, PVI: $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ -16.0354\,y' - 9.81 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$

$Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$

(b) A estimativa obtida para a altura da bola no tempo $t=0.1$s é 2.2484 metros. $\frac{1}{4}$

2. Geralmente, pode-se observar que a nota obtida numa prova depende do tempo de estudo da matéria e do tempo de atenção (sem dormir, mexer com celular, etc.) na aula. Suponha que $N \in [0, 10]$ e $t \in [0, 30]$ denotam respectivamente a nota e a soma dos tempos de estudo da matéria e de "prestação de atenção". Considere os dados seguintes:

t	5	9	11	19	23	29
N	1	2.5	2	6	9	9.5

Parece razoável assumir que a $N(t)$ pode ser aproximado por uma função logística, quer dizar

$$N(t) \approx \frac{N_M}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}},$$

sendo $N_M = 10$.

(a) Utilize o Método dos Quadrados Mínimos para estimar α_1 e α_2. Para tanto, precisa-se "linearizar" o problema no primeiro lugar. Quais são os valores obtidos α_1^* e α_2^*? [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste dado pela soma dos quadrados dos desvios referente ao problema "linearizado". [~~0.25 pts~~] 0.25 pts

(c) Calcule o residuo do ajuste à função N para $t = 5, 9, 11, 19, 23, 29$ dado pela soma dos quadrados dos desvios. [~~0.25 pts~~] 0.25 pts

(d) Utilize os valores α_1^* e α_2^* para estimar $N(25)$ [0.25 pts]

(a) $N \approx \frac{10}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}} \Rightarrow \frac{1}{N} \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{10} e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}$ $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{N} - \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} \cdot e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}$ $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{10}{N} - 1 \approx e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}$ $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{10}{N} - 1\right) \approx \alpha_1 + \alpha_2 t$ $\frac{1}{4}$

t	5	9	11	~~14~~ 19	~~23~~ 23	29
L	2.1972	1.0986	1.3863	-0.4055	-2.1972	-2.9444

$\frac{1}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \\ 1 & 11 \\ 1 & 19 \\ 1 & 23 \\ 1 & 29 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \Rightarrow B = A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 96 \\ 96 & 1958 \end{pmatrix} \frac{1}{4}, \quad b = A^T L = \begin{pmatrix} -0.86 \\ -107.50 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$$

Resolve $B \cdot \alpha = b \Rightarrow$ $\alpha_1^* = 3.4071$, $\alpha_2^* = -0.2220$ $\frac{1}{4}$

(b) Resíduo do ajuste no problema linearizado

$$\left\| \begin{pmatrix} 2.1972 \\ 1.0986 \\ \vdots \\ -2.9444 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 5 \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 9 \\ \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 29 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \qquad \frac{1}{4}$$

$L \qquad\qquad \alpha_1^* + \alpha_2^* t$

$$= \left[2.1972 - (3.4071 + (-0.222)\cdot 5)\right]^2$$
$$+ \dots + \left[-2.9444 - (3.4071 - 0.222 \cdot 29)\right]^2$$
$$= \cancel{1.9642} \quad \cancel{0.8390} \quad 0.7040$$

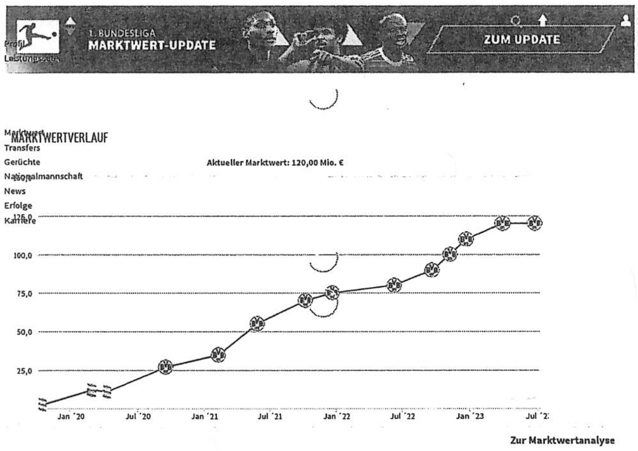
(c) Resíduo do ajuste no problema original

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 2 \\ 6 \\ 9 \\ 9.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{1+e^{\alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 5}} \\ \\ \\ \frac{10}{1+e^{\alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 29}} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \qquad \frac{1}{4}$$

$N \qquad\qquad \dfrac{10}{1+e^{\alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot t}}$

$$= \left[1 - \frac{10}{1+e^{\alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 5}}\right]^2 + \dots + \left[9.5 - \frac{10}{1+e^{\alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot 29}}\right]^2 = \underline{8.95} \quad \frac{1}{4}$$

d) $N(25) \approx \dfrac{10}{1+e^{3.4071 - 0.222 \cdot 25}} = 2.0222$



3. A figura em cima revela que o valor de mercado de Jude Bellingham aumentou consideravelmente nos últimos anos. A partir da próxima semana, ele será jogador do Real Madrid. A tabela seguinte mostra valores de mercado deste jogador de futebol em milhões de Euro às 0 : 00 hs em certas datas de 2022 e 2023. Para facilitar a resolução das questões seguintes, você deve atribuir números consecutivos para os dias começando com o dia 01/06/22 que corresponde ao dia # 1.

d = Dia #	9	113	162	206	296
Data	09/06/22	21/09/22	09/11/22	23/12/22	29/03/23
v = Valor de Mercado	80	90	100	110	120

(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* para estimar o valor de mercado do Jude Bellingham no dia 31/01/23, quer dizer no dia # 245. [1 pt]

(b) Utilize interpolação polinomial *quadrática inversa* para estimar a data na qual o Jude Bellinham atingiu um valor de mercado de 103 milhões de Euro, o valor pago pelo Real Madrid para o Borussia Dortmund (desconsiderando futuros acrescimos). [1 pt]

Ordem

(a)

d	0	1	2
162	100		
		0.2273	
206	110		−0.0008
		0.1111	
296	120		

$p_2(d) = 100 + 0.2273(d-d_0) - 0.0008(d-d_0)(d-d_1)$

$= 100 + 0.2273(d-162) - 0.0008(d-162)(d-206)$

$p_2(245) = 100 + 0.2273 \cdot 83 - 0.0008 \cdot 83 \cdot 39$

$= 116.2763$

$\therefore$ O valor de mercado do Jude Bellingham no dia 31/0[...] era $\approx$ 116.2763 milhões de E[...]

Ordem

(b)

v	0	1	2
90	113		
		4.9	
100	162		-0.025
		4.4	
110	206		

$$q_2(v) = 113 + 4.9(v-90) - 0.025(v-90)(v-100)$$

$$q_2(103) = 113 + 4.9 \cdot 13 - 0.025 \cdot 13 \cdot 3$$

$$= \cancel{166.95}\ 175.752$$

Portanto, o dia no qual o Jude Bellingham atingiu um valor de mercado de 103 milhões de Euro é ~~4~~ 13 dias depois do dia 09/11/23 (que corresponde ao dia #162

i.e., o dia ~~13~~ 22/11/23

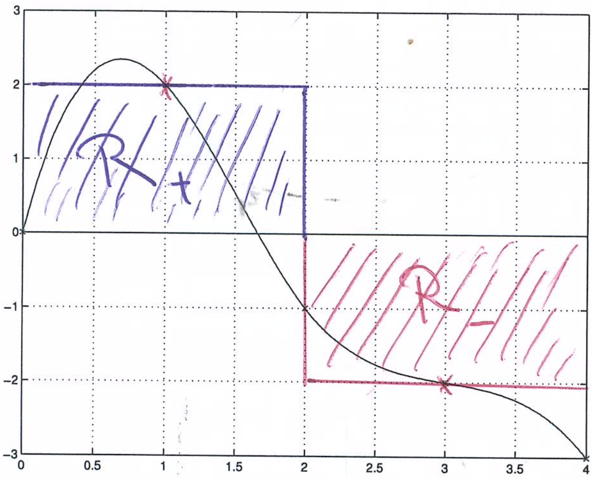
4. As figuras seguintes mostram uma função contínua f cuja integral no intervalo $[0, 4]$ queremos estimar.

(a) Utilize a figura seguinte para esboçar regiões R_+ e R_- tal que o resultado da Regra dos Retângulos Repetida com 2 subintervalos corresponde a

$$A_+ - A_-$$

sendo A_+ e A_- as áreas de R_+ e R_-, respectivamente. Qual é o resultado da aplicação da Regra dos Retângulos Repetida com 2 subintervalos conforme a sua interpretação gráfica? [0.5 pts]

$\frac{1}{4}$



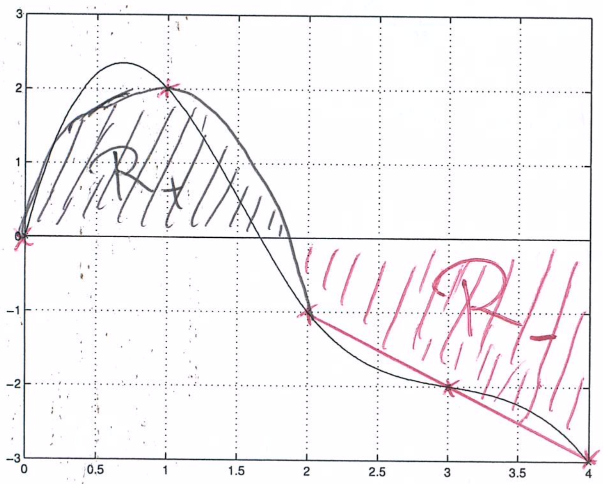
$A_+ = A_- = 2 \cdot 2 = 4$

$\Rightarrow A_+ - A_- = 0$ $\frac{1}{4}$

$\therefore$ A regra dos retângulos repetida com 2 subintervalos fornece $\int_0^4 f(x)\,dx \approx 0$

(b) Utilize a figura seguinte para *esboçar* (sem calcular) regiões R_+ e R_- tal que o resultado da Regra de Simpson 1/3 Repetida com 2 subintervalos corresponde a $A_+ - A_-$, sendo A_+ e A_- as áreas de R_+ e R_-, respectivamente.

$\frac{1}{2}$



Vire a página!

(b) $h=1$, a Regra de Simpson $\frac{1}{3}$ Repetida com 2 subintervalos fornece

$\frac{1}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) = \frac{1}{3}(0+4\cdot 2+2\cdot(-1)+4\cdot(-2)+(-3))$

Qual é a estimativa de $\int_0^4 f(x)dx$ produzida pela Regra de Simpson 1/3 Repetida com 2 subintervalos de acordo com a seguinte fórmula? [1 pt]

$= \frac{1}{3}[-2-3] = -\frac{5}{3}$

$\frac{1}{2}$

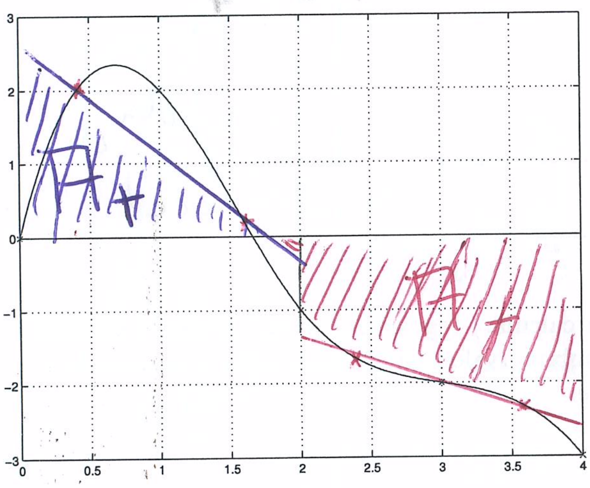
$$\frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big).$$

(c) A Quadradura Gaussiana para $\int_a^b f(x)dx$ com $n=1$ fornece a estimativa

$$G_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right)\right)+f\left(\frac{1}{2}\left(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right)\right)\right].$$

Aplique a Quadradura Gaussiana com $n=1$ duas vezes gráficamente para estimar $\int_0^2 f(x)dx$ e para estimar $\int_2^4 f(x)dx$. Para tanto, determine $\frac{1}{2}(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}})$ e $\frac{1}{2}(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}})$ nestes dois casos.

Em seguide interprete a estimativa correspondente de $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$ gráficamente em termos de $A_+ - A_-$, sendo A_+ e A_- as áreas de certas regiões R_+ e R_-, respectivamente. [1 pt]



$\frac{1}{2}$

(c) Usando Quadratura Gaussiana para estimar

$\int_0^2 f(x)dx$, temos $a=0$, $b=2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(2-\frac{2}{\sqrt{3}}) = 1-\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.4226$

$\frac{1}{2}(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}}) = 1+\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.5774$

$\frac{1}{2}$

No caso de $\int_2^4 f(x)dx$: $a=2, b=4$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(6-\frac{2}{\sqrt{3}}) = (3-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$= 2.4226$

$\frac{1}{2}(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}}) = 3+\frac{1}{\sqrt{3}} = 3.5774$