(a) $Y = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$; PVI : $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \cancel{k} v^2 - yt \end{pmatrix}$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}$$

(b)

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ v_k \end{pmatrix}$	$Y_k' = \begin{pmatrix} v_k \\ \cancel{k} v_k^2 - y_k t_k \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y_k' \cdot h$	$\bar{Y}_{k+1}' = \begin{pmatrix} \bar{v}_{k+1} \\ \bar{v}_{k+1}^2 - \bar{y}_{k+1} t_{k+1} \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\Delta Y_k \approx \frac{Y_k' + \bar{Y}_{k+1}'}{2} \cdot h$
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.2 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 2.2 \\ 4.785 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 0.1050 \\ 0.2196 \end{pmatrix}$
0.05	Soma $\begin{pmatrix} 1.1050 \\ 2.2196 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 2.2196 \\ 4.8715 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2160 \\ 2.4632 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 2.4632 \\ 5.9458 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$	Média $\frac{1}{4}$ $\begin{pmatrix} 0.1171 \\ 0.2704 \end{pmatrix}$
0.1	$\begin{pmatrix} 1.2221 \\ 2.4901 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$				

(c) $y(0.1) \approx 1.2221$ m

$v(0.1) \approx 2.4901 \frac{m}{s}$ $\frac{1}{4}$

2. A aluna X de uma turma de MS211 é uma maratonista excelente e quer se classificar para os Jogos Olímpicos de Tóquio de 2020. Para tanto, ela precisa atingir o índice olímpico da Federação Internacional de Atletismo para a prova de maratona. Em termos de velocidade em $\frac{km}{h}$, ela precisará pelo menos atingir uma velocidade média de 16.9344 $\frac{km}{h}$ nos 42.195 km.

Depois de 5 meses de treino intenso, ela se lembra de uma prova no Dia dos Namorados e resolve as questões seguintes que você também deve resolver:

(a) Sabendo-se que os avanços de desempenho seguem aproximadamente uma curva logarítmica, ajuste uma curva da forma $\alpha_1 + \alpha_2 \ln t$ às velocidades médias em $\frac{km}{h}$, atingidas pela X nos meses $1, \ldots, 5$ do seu treino: [1.5 pts]

t	1	2	3	4	5
$v(t)$	15.4	16.1	16.3	16.5	16.6

(b) Qual é o resíduo, quer dizer o erro obtido neste ajuste em termos da norma euclidiana? [0.5 pts]

(c) Utilize o seu resultado do item (a) para avaliar se a X conseguirá superar uma velocidade média de 16.9344 $\frac{km}{h}$ 3 meses depois. [0.5 pt]

(a) $g(t) = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \ln(t)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \approx v = \begin{pmatrix} 15.4 \\ 16.1 \\ 16.3 \\ 16.5 \\ 16.6 \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.6931 \\ 1 & 1.0986 \\ 1 & 1.3863 \\ 1 & 1.6094 \end{pmatrix}$

Resolve $A^T A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^T v$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4.7875 & 80.9 \\ 4.7875 & 6.1995 & 78.6576 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.4712 \\ 0.7403 \end{pmatrix}$$

Curva que melhor se ajuste aos dados no sentido dos QMs é $15.4712 + 0.7403 \cdot \ln(t)$

O resíduo é

$$\left\| A \cdot \begin{pmatrix} 15.4712 \\ 0.7403 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15.4 \\ 16.1 \\ 16.3 \\ 16.5 \\ 16.6 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 15.4712 \\ 15.9843 \\ 16.2845 \\ 16.4974 \\ 16.6626 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15.4 \\ 16.1 \\ 16.3 \\ 16.5 \\ 16.6 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0.0712 \\ -0.1157 \\ -0.0155 \\ -0.0026 \\ 0.0626 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.1504$$

(c) 3 meses depois, a X vai aproximadamente atingir a ~~a~~ velocidade ~~de~~ média

$$g(8) = \alpha_1^* + \alpha_2^* \cdot \ln(8) \approx 17.0106$$

$$> 16.9344$$

em 42.195 km

Portanto, ela deve se classificar

3. Considere $f_1 =$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Utilize a forma de Newton para encontrar o único polinômio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola os pontos $(0, f(0))$, $(0.5, f(0.5))$ e $(1, f(1))$. Lembre-se que $p_n(x) = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$, onde $f_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. [1.5 pts]

(b) Encontre o único polinômio $r_1(x)$ de grau ≤ 1 que interpola os pontos $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}), f(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}))$ e $(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}), f(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}))$. [0.5 pt]

(a)

Ordem

x	0	1	2
0	1 f_0		
		-0.2350 f_1	
0.5	0.8825		-0.3170 f_2
		-0.5520	
1	0.6065		

$p_2(x) = 1 - 0.2350 \cdot x - 0.3170\, x(x - 0.5$

(b)

Ordem

$1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	0	1
$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	0.9146 f_0	
		$-0.\cancel{5425}$ 54281 $\left(= \frac{-0.6264}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right)$
$1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	0.2882	

$r_1(x) = \cancel{0.9146 + (}-0.5425) \cdot x$

0.2882 − 0.9146 + 2 f_1 ... $(1 + \sqrt{3}$

$$r_1(x) = f_0 \cdot \cancel{x} + f_1 (x - x_0)$$

$$= 0.9146 + (-0.5425)\left(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

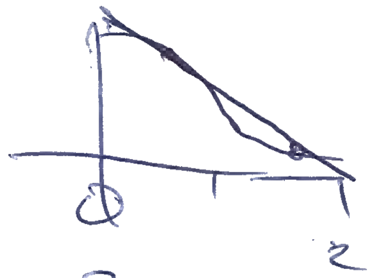
4. I

d) Com $x = t + 1$ realizamos uma translação para esquerda, os valores de x correspondem aos valores de $t + 1$

Portanto $I_Q = \int_0^2 r_1(x)\,dx$

$$r_1(x) = 0.9146 - 0.5425x + 0.5425 - 0.5425\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1.1439 - 0.5425x$$



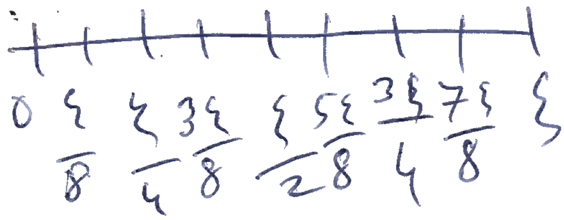
$$\int_0^2 1.1439\,dx - \int_0^2 0.525x\,dx$$

$$= 1.1439\,x\Big|_0^2 - \frac{0.525}{2}x^2\Big|_0^2$$

$$= \cancel{1.0278}\ 1{,}2028$$

(e)

$g(\xi)$



$h = \frac{\xi}{8}$

$$= \frac{\xi}{24}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\xi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\xi}{4}\right)\right.$$
$$+ 4f\left(\frac{3\xi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\xi}{2}\right) + 4f\left(\frac{5\xi}{8}\right) + 2f\left(\frac{3\xi}{4}\right) + 4f\left(\frac{7\xi}{8}\right) +$$

4. Seja

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a) Use a Regra de *Simpson* (Simples, i.e., com 1 subintervalo) para determinar uma estimativa I^S para a seguinte integral [0.5 pt]:

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Qual é a relação entre I^S e o polinômio p_2 encontrado na Questão 3 (a)? Justifique a sua resposta através de contas. [0.5 pt]

(c) Utilize Quadratura Gaussiana com 2 pontos (veja as fórmulas seguintes) para determinar uma estimativa I^Q da seguinte integral [0.75 pt]:

$$\int_0^2 f(x)dx.$$

(d) Qual é a relação entre I^Q e a reta r_1 encontrada nas Questão 3 (b)? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]

(e) Utilize a Regra de *Simpson Repetida* (com 4 subintervalos para escrever uma equação da forma $g(z) = 1$ que não envolve nenhum integral e cuja solução positiva ξ é tal que

$$\int_0^{\xi} f(x)dx \approx 1$$

[0.75 pt]

ALGUMAS FÓRMULAS

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_{\phi(-1)=a}^{\phi(1)=b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\phi(t))\phi'(t)dt, \quad x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b-a)]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

4.

(a) $I^S = \frac{1}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$ $\quad 0 \quad 0.5 \quad 1$; $x_0 \quad x_1 \quad x_2$

$= \frac{1}{6}[1 + 0.8825 \cdot 4 + 0.6065]$ $\quad h = 0.5$

$= \frac{1}{6}[5.1365] = 0.8561$

(b) $p_2(x) = 1 - 0.235 \cdot x - 0.317 x (x - 0.5)$

$= 1 - 0.235x - 0.317x^2 + 0.1585x$

$= -0.317x^2 - 0.0765x + 1$

$$I_S = \int_0^1 p_2(x)\,dx = -\frac{0.317}{3} x^3 \Big|_0^1 - \frac{0.0765}{2} x^2 \Big|_0^1 + 1 \Big|_0^1$$

$$= -\frac{0.317}{3} - \frac{0.0765}{2} + 1$$

$$= 0.8561$$

(c) $$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

onde $\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[2 + 2t\right] = t + 1$

$\varphi'(t) = 1$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}\,dt \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= e^{-\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^2}{2}} + e^{-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^2}{2}}$$

$$= 0.9146 + 0.2882 = \underline{\underline{1.2028}}$$