1. (a) Se $\mathbb{F}$ é um corpo, então $(\mathbb{F}, +)$ é um grupo comutativo.
o que implica que $\mathbb{F}$ possui um (único) elemento neutro ou zero com respeito a $+$.
Este elemento é denotado por 0.

Além disso, $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo (com.)
Então $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ tem um elemento neutro com respeito a $\cdot$. Este elemento é denotado por 1.

Segue que $|\mathbb{F}| \geq 2$. VERDADEIRO

(b) Se $\mathcal{V}$ é um espaço vet., então $\mathcal{V} \neq \emptyset$.

Caso 1: $\mathcal{V} = \{0_{\mathcal{V}}\} \Rightarrow |\mathcal{V}| = 1$.

Caso 2: $\exists V \in \mathcal{V}$ t.q. $V \neq 0_{\mathcal{V}}$

$\Rightarrow \alpha V \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(se $\alpha \neq \beta$ então $\alpha V \neq \beta V$)

$\Rightarrow |\mathcal{V}| = \infty$ VERDADEIRO

(c) Considere $\mathcal{V} = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
Somente existem 2 subespaços (distintos) de $\mathbb{R}$,
a saber $\{0\}$ e $\mathbb{R}$. FALSO

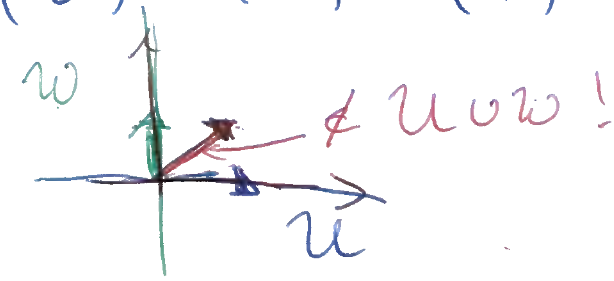
(Note que se $\mathcal{U}$ é subesp. de $\mathbb{R}$ com $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, então
[illegible] $\Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = 0 \Rightarrow \mathcal{U} = \{0\}$)

(d) Seja $\mathcal{V}=\mathbb{R}^2$ e sejam

$\mathcal{U}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$ e $\mathcal{W}=\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$

Tem-se $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{U}\cup\mathcal{W}$ mas

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin \mathcal{U}\cup\mathcal{W}$$



FALSO

(e) Qualquer esp. vet. real $\mathcal{V}$ com $\dim(\mathcal{V})=n>0$ possui uma base $\{V_1,\dots,V_n\}$ ~~de~~ (onde $V_i \neq V_j$ para i

Portanto $\{\alpha V_1, \dots, \alpha V_n\}$ também é base de $\mathcal{V}$ para qualquer $\alpha \neq 0$ (e $\alpha\in\mathbb{R}$)

VERDADEIRO

(Note que $\alpha_1 \alpha V_1 + \dots + \alpha_n \alpha V_n = 0$ implica que $\alpha_1\alpha = \dots = \alpha_n\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ (L.I.

e visto que $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists \beta_1,\dots,\beta_n$ t.q. $V=\sum_{i=1}^{n}\beta_i V_i$

tem-se $V=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\alpha}\cdot\alpha V_i$)

(f) Note que a função constante $0 \notin N$ porque $0'$ existe $(0'=0.)$

$\Rightarrow N$ não é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

FALSO!

2.(a) $\mathcal{R}$ é L.I.?

Considere

$\alpha(1+2x-x^2+x^3)+\beta(3+2x+x^2+x^3)+\gamma(-5+2x-7x^2+x^3)=$

$$\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\\\cancel{0}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&3&-5\\2&2&2\\-1&1&-7\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Contas:

$$\begin{pmatrix}1&3&-5\\2&2&2\\-1&1&-7\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-5\\1&1&1\\-1&1&-7\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-5\\1&1&1\\0&2&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

variavel livre

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-2&6\\0&2&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\beta=3\gamma$

$\alpha+9\gamma-5\gamma=0$

$\Rightarrow \alpha=-4\gamma$

infinito de soluções $\left(S=\left\{\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\gamma \mid \gamma\in\mathbb{R}\right\}\right)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ é L.D.!

Obs.: $(-5+2x-7x^2+x^3)=4(1+2x-x^2+x^3)-3(3+2x+x^2+x$

2.(b) $\mathcal{U}=[\mathcal{R}]\overset{\text{Obs.:}}{=}[1+2x-x^2+x^3,\ 3+2x+x^2+x$

A soma $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ é direta

$\Leftrightarrow \mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\{0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}\}=\{0+0x+0x^2+0x^3\}$

Suponha que $V \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ com $V \neq 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}$

$\iff$ $V \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ e $V = c(4 - x - x^3)$ para algum $c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$

Portanto $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}\}$ é equivalente a:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ para alguns $a, b \in \mathbb{R}$ e algum $c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$

$\iff$ $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad (*)$$

Contas:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \lightning$$

$$-\frac{1}{2} = \alpha + \beta = 1$$

$\nexists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $(*)$ é satisfeito

$\therefore$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}\}$, quer dizer a soma $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ é direta

2 (c) $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V})$

$= \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V})$

$= 2 + 1 = 3$

$$\left(\text{Obs.: } \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ e } \nexists\, \alpha \text{ t.q. } \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = 2 \right)$$

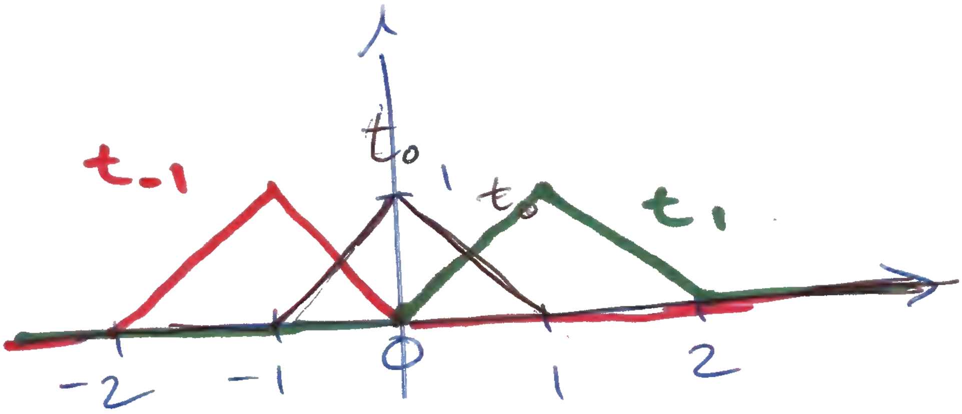
(d) $\mathcal{U}+\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ implica que

$\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$

mas $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) = 3$. Portanto,

$\mathcal{U}+\mathcal{V} \neq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

3. (a)



(b) Considere

$$\alpha t_{-1} + \beta t_0 + \gamma t_1 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \alpha t_{-1}(x) + \beta t_0(x) + \gamma t_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha t_{-1}(-1) + \cancel{\beta t_0(-1)} + \cancel{\gamma t_1(-1)} = 0 \\ \cancel{\alpha t_0(\overset{0}{\cancel{1}})} + \beta t_0(0) + \cancel{\gamma t_1}(0) = 0 \\ \alpha \cancel{t_{-1}}(1) + \cancel{\beta t_0}(1) + \gamma t_1(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1 = 0, \ \beta \cdot 1 = 0, \ \gamma \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\therefore \{t_{-1}, t_0, t_1\}$ é L.I.

(c) Note que $t_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Então $[\mathcal{R}]$ é subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

(d) Lembre-se $\mathcal{R}$ é base de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$ (i) $\mathcal{R}$ é L.I.

e (ii) $[\mathcal{R}] = \mathcal{C}(\mathbb{R})$

Suponha que $\mathcal{T}$ é base de $C(\mathbb{R})$

Então $1 \in C(\mathbb{R})$ pode ser representado por uma combinação linear de elementos de $C(\mathbb{R})$

$\iff \exists K \subset \mathbb{Z}$ com $|K| < \infty$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$, onde $k \in K$, tal que

$$1 = \sum_{k \in K} \alpha_k t_k$$

$\Rightarrow$ Para ~~Seja~~ $m = \max\{k \mid k \in K\} = \max K$

temos $$1 = \sum_{k \in K} \alpha_k t_k(m+1) = 0 \quad ↯$$

$\therefore \mathcal{T}$ não é base de $C(\mathbb{R})$

(e) Suponha que $\dim(C(\mathbb{R})) = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Note que $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é L.I porque

$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t_k = 0$ implica que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t_k(i) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$

e daí $$\begin{cases} \alpha_0 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 0 \\ 0 + \alpha_1 \cdot 1 + \dots + 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 + 0 + \dots + \alpha_n \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Portanto $\dim[t_0, \dots, t_n] = n+1 > n = \dim C(\mathbb{R})$ mas $[t_0, \dots, t_n]$ é subesp. de $C(\mathbb{R})$

↯ $\therefore \dim(C(\mathbb{R})) = \infty$