6. (2 pt) Responda falso ou verdadeiro justificando :

(a) Se $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz ortogonal, então Q é uma matriz de rotação .

(b) Cada matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ é diagonalizável.

(c) Existe uma matriz (com entradas reais) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ que não tem nenhum autovalor real mas dois autovalores complexos.

(d) Existe um operador linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que não tem auto-valores reais.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

1.(a) λ é autovalor de φ

$\iff \exists V \neq 0 \in \mathcal{V}$ t.q. $\varphi(V) = \lambda V$

$V \neq 0 \in \mathcal{V}$ é autovetor de φ

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{F}$ t.q. $\varphi(V) = \lambda V$

poli. caracteristico : $p_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\, id$

$\mathcal{E}_\lambda = N(\varphi - \lambda\, id_{\mathcal{V}})$

(b) Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, temos $p_\varphi(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i$

$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

onde m_i é a multiplicidade algébrica de λ_i para $i = 1, \dots, k$

~~Se~~ n_i é a multiplicidade geometrica de

$\iff n_i = \dim \mathcal{E}_{\lambda_i}$, $i = 1 \dots, k$

1.(b) cont.:

Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ e seja $q = q_A$

$$0 = p_q(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 = (\lambda - 0)^2$$

$\Rightarrow$ 0 é autovalor de q com multiplicidade algébrica 2

$$\mathcal{E}_0 = N(A) = \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$= [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{E}_0) = 1$

então a multiplicidade geométrica de 0 é $1 < 2 =$ " algébrica de 0

2.(a) $p_{\mathcal{A}} = \det(A - \lambda I)$

$$= \det \left(\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 2 & & \\ 2 & -\lambda & & 0 \\ \hline & 0 & 1-\lambda & 2 \\ & & 2 & 1-\lambda \end{array} \right) = [\lambda^2 - 4][(1-\lambda)^2 - 4$$

$\frac{1}{2}$

$$= (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4)$$

$$= (\lambda^2 - 4)(\lambda - 2\lambda - 3)$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -1, \ \lambda_4 = 3$ $\frac{1}{4}$

(b)

Temos 4 autovalores diferentes então temos uma base de autovetores de $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^4$, i.e., $\mathcal{A}$ é diagonalizável

Mult. geral $\frac{1}{2}$

Visto que $\dim(\mathcal{E}_{\lambda_i}) \geq 1 \quad i = 1, \dots, 4$

temos $\dim(\mathcal{E}_{\lambda_i}) = 1 \quad - 4$

$\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_2$ porque $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $\mathcal{E}$

$\lambda_2 = -2$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{-2}$ porque $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)$

$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{-2} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $\mathcal{E}$

$\lambda_3 = -1$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{-1}$ pq. $A \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{-1} = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$, $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ é base de $\mathcal{E}_{-1}$

$\lambda_4 = 3$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{E}_3$ pq $A \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{E}_3 = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$, $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ é base de $\mathcal{E}_3$

$\frac{1}{2}$

Alternativamente,
calcule $N(A - \lambda_i I)$ $i = 1, \dots 4$

Método geral $\frac{1}{2}$

por ex. $\lambda_4 = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & & \\ 2 & -3 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -2 & 2 \\ & & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{2}{3} & & \\ 0 & -3+\frac{2}{3} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -1 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & - \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ ~~Nuc~~ $\mathcal{E}_3 = \left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

3.(a) φ é diagonalizável $\frac{1}{4}$

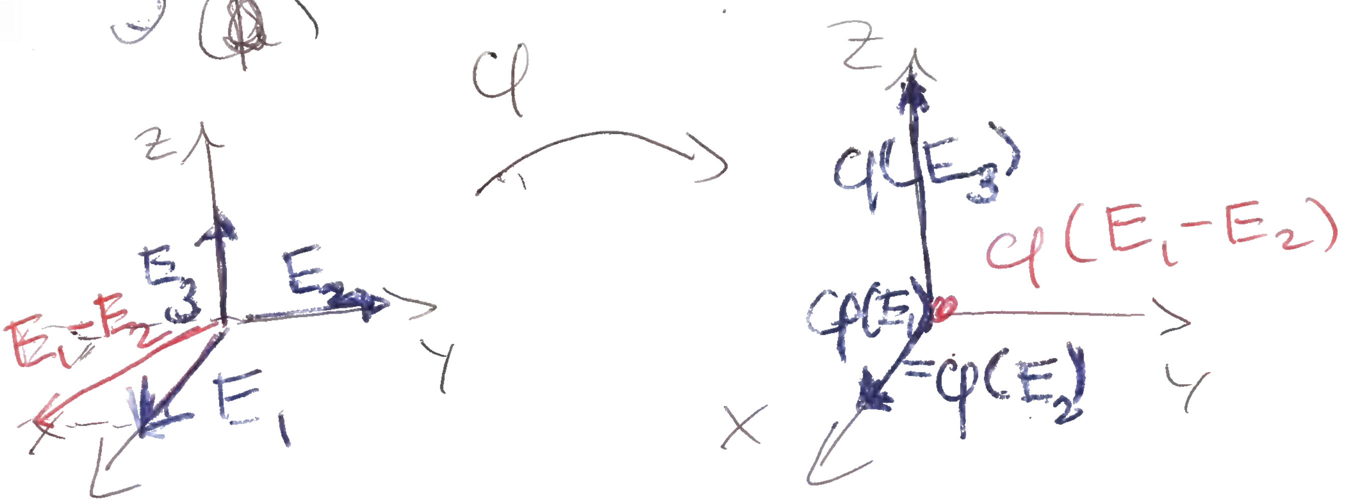
$\Leftrightarrow \exists$ uma base de autovetores de φ para V

A é diagonalizável $\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow A$ é a matriz de φ, onde φ é diagonalizável

$\Leftrightarrow \exists$ uma base de autovetores de A para $\mathbb{F}^n$

3 (a)



$\varphi(E_1) = E_1 = 1 \cdot E_1$

$\varphi(E_1 - E_2) = 0 = 0 \cdot (E_1 - E_2)$

$\varphi(E_3) = 2 \cdot E_3$

$\therefore$ $\exists$ 3 autovalores diferentes: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ 1/4

e $\dim(E_{\lambda_i}) \geq 1 \quad i = 1,2,3$

$\therefore$ φ é diagonalizável

$$3 \leq \sum_{i=1}^{3} \dim(E_{\lambda_i}) \leq 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

$$\Rightarrow \dim(E_{\lambda_i}) = 1 \quad i = 1,2,3$$

Então $\mathcal{E}_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$, $\mathcal{E}_0 = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]$, $\mathcal{E}_2 = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ 3/4

$AQ = QD$ com Q ~~tendo~~ base de autovetores nas colunas

$\Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$

$\therefore Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 1/4

4.(a) $\varphi^*: W \to V$ é adjunta de $\varphi: V \to W$

$$\iff \langle \varphi(v), w \rangle_W = \langle v, \varphi^*(w) \rangle \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

(b) $$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 3-i \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad (A^* = \overline{A}^T)$$

(c) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que

$A^* = A^T$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^T Y = (X^T A^T) Y$$

$$= X^T (A^T Y)$$

$$= \langle X, A^T Y \rangle$$

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}^m$$

5. Para calcular os autovalores considere $0 = \det(A - \lambda I)$

A determinante não muda se um múltiplo de uma linha é somada a uma outra

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - \\ 1 & 1 & 2 - \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + (\lambda-1)[\lambda-1+$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + (\lambda-1)(2\lambda-2)$$

5.

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(\lambda-1)^2$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

$$\therefore \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4$$

Para $\lambda_1 = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z = -x - y \quad E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \middle| \ \in \right.$$

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right]$$

Temos $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ é base de $\mathcal{E}_1$

pq nenhum dos 2 vetores é múltiplo do outro

$$\mathcal{E}_4 = 2$$

$$A - 4I = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & +1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -1 & +1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & d-2\end{pmatrix} \sim \xcancel{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \therefore \left.\begin{aligned} z &= x\\ z &= y\end{aligned}\right\} x = y = z$$

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$ Seja $\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Tem-se $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

é base de autovetores de φ

mas $\mathcal{B}$ não é base ortonormal " "

Note que $\mathcal{B}_1 \perp \mathcal{B}_4$ porque

$$\left\langle \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \alpha\gamma (1, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\gamma (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$$

Então para obter uma base ortonormal $\overline{\mathcal{B}}$

é suficiente de obter " $\overline{\mathcal{B}}_1$ de $\mathcal{E}_1$

e definir $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_1 \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Seja $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

e $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle u_1, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle u_1$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1-0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2(1+4+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right.$$

é base ortonormal de autovetores de q para $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow\ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ serve

5. Abordagem alternativa para ~~ent~~ encontrar os λ_i e bases para $\mathcal{E}_{\lambda_i}$

Observe que

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \\ \text{e } A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}_1 \supseteq \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$$

Além disso

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathcal{E}_4\supseteq\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

Construa $\overline{\mathcal{B}}_1$ e normalize $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Observe que $\overline{\mathcal{B}}_1 \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ é um conj. ortonormal

$\Rightarrow \dim\left(\left[\overline{\mathcal{B}}_1 \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right]\right)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_1 \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow Q = \ldots,\ D=\ldots$

6. (2 pt) Responda falso ou verdadeiro justificando :

(a) Se $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz ortogonal, então Q é uma matriz de rotação .

(b) Cada matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ é diagonalizável.

(c) Existe uma matriz (com entradas reais) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ que não tem nenhum autovalor real mas dois autovalores complexos.

(d) Existe um operador linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que não tem auto-valores reais.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!

6.(a) $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz de rotação

$\iff Q$ é ortogonal e $\det(Q) = 1$

$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal porque

$\bar{Q}\,\bar{Q}^T = \bar{Q}^T \bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mas $\det(\bar{Q}) = -1$

então $\bar{Q}$ não é matriz de rotação

FALSO

(b) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \subseteq \mathbb{C}^{3\times 3}$

$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 = -(\lambda - 0)^3$

$\Rightarrow 0$ é autovalor com multiplicidade 3

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ $\mathcal{E}_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \dim(\mathcal{E}_0) = 1 < 3$

$\therefore A$ não é diagonalizavel FALSO

6.(c) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

A tem 2 autovalores distintos: i e $-i \in \mathbb{C}$
e nenhum autovalor real

VERDADEIRO

(d) Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$X \mapsto AX$

onde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda^2+1)(\lambda^2+1)$$
$$= (\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - i)$$

VERDADEIRO