1. (a) PVI: $\begin{cases} \underline{V}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kv(C_d u + C_L v) \\ kv(C_L u - C_d v) - 9.8 \end{pmatrix} \\ \underline{V}(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\sqrt{3} \\ 15 \end{pmatrix} \end{cases}$

(b) ....

(c) $V(0,2) \approx \sqrt{u_2^2 + v_2^2} \approx \sqrt{690.0202}$

$\approx 26.2682 \left(\frac{m}{s}\right)$

$\approx 94.5657 \ \frac{km}{h}$

$V(0) = 30 \ \frac{m}{s} \approx 108 \ \frac{km}{h}$

1. $K = \dfrac{1{,}21\,\pi \cdot (0.033)^2}{2 \cdot 0{,}057} = 0{,}0363$

(b)

t_k	$V_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$	$V_k' = kV_k \begin{pmatrix} -0.5u_k + 0.3v_k \\ -0.3u_k - 0.5v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}$	$\bar{V}_{k+1} = V_k + V_k' \cdot h = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k+1} \\ \bar{v}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{V}'_{k+1} = k\bar{V}_{k+1} \begin{pmatrix} -0.5\bar{u}_{k+1} + 0.3\bar{v}_{k+1} \\ -0.3\bar{u}_{k+1} - 0.5\bar{v}_{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}$	$\Delta V_k = \dfrac{V_k' + \bar{V}'_{k+1}}{2} \cdot h$
0	$\begin{pmatrix} 25.9808 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9.2493 \\ -26.4612 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25.0559 \\ 12.3539 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.9459 \\ -23.6865 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.9098 \\ -2.5074 \end{pmatrix}$
0.1	$\begin{pmatrix} 25.0710 \\ 12.4926 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.9354 \\ -23.7990 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24.1775 \\ 10.1127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.5839 \\ -21.4833 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -.8760 \\ -2.2641 \end{pmatrix}$
0.2	$\begin{pmatrix} 24.1950 \\ 10.2285 \end{pmatrix}$				

Obs: $V_k = \sqrt{u_k^2 + v_k^2}$ $\qquad$ $\bar{V}_{k+1} = \sqrt{\bar{u}_{k+1}^2 + \bar{v}_{k+1}^2}$

FORMULA

$$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$
onde $f_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$

Ordem

X	0	1	2
1	23.464		
		1,69	
2	25.154		13.824
		29.338	
3	54.492		

$$P_2(x) = 23.464 + 1.69(x-1) + 13.824(x-1)(x-2)$$
$$= 13.824x^2 - 39.782x + 49.422$$
$$P_2(x) = 50 \Leftrightarrow p_2(x) - 50 = 0$$
$$\Leftrightarrow 13.824x^2 - 39.782x - 0.578 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{39.782 \pm \sqrt{39.782^2 + 4 \cdot 13.824 \cdot 0.578}}{2 \cdot 13.824}$$
$$x_1^* = 2.8631 \in [1,3], \quad x_2^* = 0.0146 \notin [1,3]$$

$\rightsquigarrow$ ano = 2014 + 2 = 2016

mês: 0.8631 · 366 (2016 foi ano com 366 dias) = 315.8946

até dia 31/10/2016 : 305 dias
0:00h

Portanto no dia 11/11/2016
as 0:00h foram atingidos
50 000 carros

(5) $15.67 = 13.67 + a \cdot e^{5x}$

$2 = a e^{5x} \Rightarrow \frac{2}{a^*} = e^{b^* x} \Rightarrow$

$b^* x = \ln(2) - \ln(a^*)$

$x = \frac{\ln(2/a^*)}{b^*}$

$= \frac{\ln 1.8741}{0.2801}$

$= 6.6835$

3. A tabela seguinte mostra (valores aproximados de) temperaturas médias anuais globais em graus Celsius.

Ano t	1970	1980	1990	2000	2010	2015
Temp. em Graus	13.94	14.13	14.29	14.30	14.56	14.80

(a) Seja $x = \frac{t-1970}{10}$. Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva da forma $T + ae^{bx}$ aos dados da tabela em baixo. Aqui T se refere à temperatura média anual global sem atividade económica. Pode-se assumir que $T = 13.67$ graus Celsius. [2 pts]

x	0	1	2	3	4	4.5
y	13.94	14.13	14.29	14.30	14.56	14.80

(b) Utilize o seu resultado para estimar o ano em que a temperatura média global superará pela primeira vez a marca de 2 graus Celsius [0.5 pt]

(Deve-se usar dados anuais e eventualmente um outro típo de curva para obter uma estimativa melhor.)

Note que em 2036 ainda em baixo da marca de 15.67°. Em anos 6 ≈ 2030 No ano meio de 2027 supera 15.67°C portanto Estimativa 2027

3- (a) $y \approx T + a \cdot e^{bx}$

$\Leftrightarrow y - T \approx a \cdot e^{bx}$

$\Rightarrow \underbrace{\ln(y-T)}_{z} \approx \underbrace{\ln a}_{\alpha_1} + \underbrace{b}_{\alpha_2} x$

x	0	1	2	3	4	4.5
z	-1,3093	-0.7765	-.4780	-.462	-.1165	0.1222

$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \approx z \Leftrightarrow A^T A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^T z$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4.5 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 14.5 & -3.0202 \\ 14.5 & 50.25 & -3.0349 \end{array}\right)$$

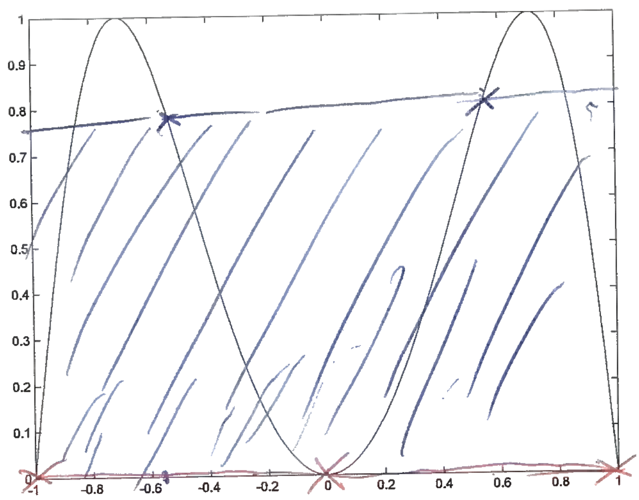
$\Rightarrow \alpha_1^* = -1,1810$

$\alpha_2^* = 0.2804$

$a^* = e^{\alpha_1^*} = 0.3070$

$b^* = \alpha_2^* = 0.2804$

Ajuste $y \approx T + a^* e^{b^* x}$



Area obtida pela Quadratura Gaussiana

Simpson

(a) Usando a regra de Simpson, procura-se um poli de grau ≤ 2 que interpola $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$

Resultado: A função constante 0

Resultado da regra de Simpson: $\int_{-1}^{1} \sin(x^2\pi)\,dx \approx \int_{-1}^{1} 0 = 0$

4. (a) Considere o gráfico de $\sin(\pi x^2)$ plotado em cima. Faça uma interpretação gráfica de

   i. uma aplicação da regra de Simpson para estimar o valor de $\int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2)dx$.

   ii. uma aplicação do método da Quadratura Gaussiana (de dois pontos) para estimar o valor de $\int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2)dx$.

   Mostre os nós de interpolação e os polinômios interpolantes utilizados e interprete as áreas que correspondem aos resultados das aplicações da regra de Simpson e da Quadratura Gaussiana. Use o seu gráfico para *determinar o valor obtido pela regra de Simpson sem fazer cálculos.* [1 pt]

   (b) Determine aproximações para $\int_{0}^{1} \sin(\pi x^2)dx$ usando

   i. a regra de Simpson;

   ii. Quadratura Gaussiana (de dois pontos).

   Utilize os resultados de i. e ii. e o fato que $\int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2)dx = 2\int_{0}^{1} \sin(\pi x^2)dx$ para obter duas estimativas para $\int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2)dx$. [1.5 pt]

ALGUMAS FORMULAS

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b-a)]$

1. (b)

(i) $\int_0^1 \sin(\pi x^2)$

0 0.5 1

$h = \frac{1}{2}$

Portanto, usando Simpson

$$\approx \frac{1}{6}\left[\sin(\pi 0^2) + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\pi\right]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714$$

$\therefore \int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2) \approx 2\cdot 4714 = 0.9$

(ii) Lembre-se $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(-1) = 0$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(1+t) \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \sin(\pi x^2)dx = \int_{-1}^{1} \sin\left(\pi\frac{(1+t)^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(1+t)^2\right)dt$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1{,}0673] = 0.5336$$

Usando QG: $\int_{-1}^{1} \sin(\pi x^2)dx \approx 1{,}0673$