GABARITO I

Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (28/11/2013)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

Trabalhe com *radianos* e com pelo menos 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas! Boa prova!

---

1. Considere o PVI seguinte:

$$\begin{cases} y' = y\,, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Seja $h = 0.5$. Lembre-se que toda solução y da equação diferencial $y' = y$ satisfaz $y(x) = ae^x$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha aproximações de $y(0.5)$ e $y(1)$ usando o método de Euler. Determine os erros globais e locais cometidos nos primeros dois passos do método de Euler, apresente as contas que levaram a estes erros globais e locais e preenche os espaços marcados por ... da tabela em baixo. [2.5 pts]

x	y	erro local	erro global	$y' = f(x,y) = $ ...y	$\Delta y \approx y'h$
0	1	0	0	1	0,5
0.5	1,5	0,1487	0,1487	1,5	0,75
1	2,25	0,223	0,4683		

(b) A tabela seguinte se refere a um método de Runge-Kutta de segunda ordem. Qual? Preenche os espaços marcados por ... [1.5 pt]

Euler Aperfeiçoado.

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k) = $ ...y	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}) = $ ...$\bar{y}_{k+1}$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
0	1	1	1,5	1,5	0,625
0.5	1,625	1,625	2,4375	2,4375	1,0156
1	2,6406				

2. Considere que a tabela abaixo

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	176	97	46	17	4	1	2	1	-8	-31	-74

em que a função $f(x) = 1 + 2x^2 - x^3$ foi avaliada exatamente.

Se tentarmos aplicar o método dos quadrados mínimos para ajustar uma função na forma $\phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$, quais serão os coeficientes c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 obtidos? Utilize fatos apresentados na aula para justificar sua resposta claramente sem fazer contas. [1.5 pts]

3. Considere as taxas de CO_2 em partes por milhão (ppm) medidas no observatório Mauna Loa, Havaí, nos primeiros seis mêses de 2014. Assume que as medições foram tomadas às 24 horas no último dia do mês.

mês	*Jan*	*Fev*	*Mar*	*Abr*	*Mai*	*Jun*
taxa de CO_2	397.85	398.01	399.77	401.38	401.78	401.25

Utilize interpolação *quadratica inversa* (interpolação inversa por um polinômio de grau ≤ 2) pela forma de Newton com nós de interpolação apropriados (justifique a sua escolha) para estimar o dia quando a taxa de CO_2 ultrapassou pela primeira vez a marca histórica de 400 ppm.

Para tanto, escreve cada um dos últimos dias de janeiro até junho de 2014 em termos de um número inteiro $n \in [1, 365]$. Suponha que o resultado da interpolação inversa seja t. Note que $t \in [n-1, n]$ indica que a a taxa de CO_2 ultrapassou 400 ppm no n-ésimo dia de 2014. [2.5 pts]

Veja as questões no verso!

1.(a) Cálculo do 1º erro global = 1º erro local

$y(0{,}5) - y_1 = e^{0{,}5} - y_1 \approx 1{,}6487 - 1{,}5 \approx \underline{\underline{0{,}1487}}$

2º erro global:

$y(1) - y_2 = e^1 - y_2 \approx 2{,}7183 - 2{,}25 \approx 0{,}4683$

Para calcular o 2º erro local, considero

o PVI $\begin{cases} u' = u \\ u(0{,}5) = 1{,}5 \end{cases}$

u é da forma $u(x) = a \cdot e^x$ para algum $a \in \mathbb{R}$

$1{,}5 = u(0{,}5) = a \cdot e^{0.5} \approx a \cdot 1{,}6487$

$\Rightarrow a \approx 0{,}9098$

2º erro local: $u(1) - y_2$

$= u(1) - 2{,}25 \approx 2{,}4731 - 2{,}25 \approx \underline{\underline{0{,}2231}}$

2. O método dos QMs aplicado a este (de facto sabemos a unicidade tb no ajuste polinomial com m dados em um n onde m > n (polis de grau ≤ n)) problema resulta no ~~único~~ poli de grau ≤ 4 que providencia o melhor ajuste aos dados no sentido dos QMs, quer dizer ϕ é tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(-5) - f(-5) \\ \phi(-4) - f(-4) \\ \vdots \\ \phi(+5) - f(+5) \end{pmatrix} \right\|_2 = \min_{\substack{\text{polis } p \\ \text{de grau} \leq 4}} \left\| \begin{pmatrix} p(-5) - f(-5) \\ \vdots \\ p(+5) - f(+5) \end{pmatrix} \right\|$$

Visto que f é poli de grau 3

temos f " " ≤ 4

Além disso

$$\left\| \begin{pmatrix} f(-5) - f(-5) \\ f(-4) - f(-4) \\ \vdots \\ f(5) - f(5) \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0$$

e

$$\left\| \begin{pmatrix} p(-5) - f(-5) \\ p(-4) - f(-4) \\ \vdots \\ p(5) - f(5) \end{pmatrix} \right\|_2 \geq 0 \quad \forall \text{ polis } p \text{ de grau } \leq 4$$

e sabemos de um teorema que

$\exists!$ poli p de grau ≤ 10 que interpola os dados que dizem tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} p(-5) - f(-5) \\ p(-4) - p(-4) \\ \vdots \\ p(5) - f(5) \end{pmatrix} \right\|_2 = 0$$

Este poli de grau ≤ 10 é f

Portanto

$\Phi = f$

e

$c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 2,$
$c_3 = -1$

3. 31/01 → 31, 28/02 → 59, ... 30/06 → 1

dia de 2014	31	59	90	120	151
taxa de CO_2	397.85	398.01	399.77	401.38	401,7

Seja $f: \{1, 2, \ldots, 365\} \to \mathbb{R}$

a função que associa o t-ésimo dia de 2014 com a taxa de CO_2 medida neste dia

Note que f restrito a $\{31, 59, \ldots, \cancel{181} \; 151\}$ é estritamente crescente

Portanto, é razoável assumir que $f: \{\cancel{1, 2}, \ldots, \cancel{32}\ 31, 32, \ldots, \cancel{151}\} \to \mathbb{R}$ $[31, 151]$ é estritamente crescente. Supondo isto,

$\exists f^{-1}: [397.85, 401.78] \to [31, 151]$

e f^{-1} é estritamente crescente

A escolha dos ~~Podemos escolher~~ $(399.77, 90)$

$(401.38, 120)$ $(401.78, 151)$

como os 3 nós de interpolação inversa (devido ao fato que as taxas de CO_2 399.77, 401.38 e 401.78

são as mais proximas de 400)

resulta em

$p_2(y) = 90 + 18{,}6335(y - 399{,}77)$
$+ 29{,}2868(y - 399{,}77)(y - 401{,}38)$

$\Rightarrow p_2(400) \approx 84{,}99 < 90 = p_2(399{,}77)$

mas p_2 deve ser $\approx f^{-1}$ que é estritamente crescente

O ~~resultado~~ A estimativa que a taxa de CO_2 ultrapasso 400 ppm no 85° dia de 2014 é incompatível com os dados

(~~Que~~ (Não foi deduzido nada se alguem obteve este resultado)

Outros ~~nós~~ valores proximos ~~são~~ ~~do~~ a 400 (~~398,~~ são 398,01, 399.77 e 401,38

Ordem

y	0	1	2
398,01	59 (f_0)	17,6136 (f_1)	0,3026 (f_2)
399,77	90	18,6335	
401,38	120		

$$p_2(y) = 59 + 17{,}6136(y - 398{,}01) + 0{,}3026(y - 398{,}01)(y - 399{,}77)$$

$$p_2' = 17{,}6136 + 0{,}3026(2y - 475{,}01) > 0 \quad \forall y \in [398{,}01,\ 401{,}38]$$

$\Rightarrow$ p_2 é estritamente crescente neste intervalo

$$p_2(400) \approx 94.1896 \in [94,\ 95]$$

Daí, a estimativa do dia quando a taxa de CO_2 ultrapassou pela 1ª vez os 400ppm é o dia 05/04/2014

4. $$\int_{a=\varphi(-1)}^{b=\varphi(1)} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$a=0,\ b=\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \varphi(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4}+t\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{8}(1+t)$$

$$\varphi'(t)=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$=\frac{\pi^2}{8}\int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\,dt$$

$$\approx \frac{\pi^2}{8}\left[\frac{5}{9}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{8}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\right)+\frac{8}{9}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{8}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{5}{9}\cos\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{8}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\right)\right]$$

$$\approx \frac{\pi^2}{72}\left[5\cdot 0{,}0910+8\cdot 0{,}4440+5\cdot 0{,}8642\right]$$

$$\approx \underline{\underline{1{,}1416}}$$