GABARITO

MS211 - Turma Y - Prova 1 - 02/10/2018

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões **exceto nas Questões 1 e 4**! Boa sorte!

1. Utilize o Método de Eliminação Gaussiana *com Pivoteamento Parcial* para encontrar a solução de $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Faça contas exatas no conjunto dos números racionais, quer dizer usando frações.

2Pts

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -3 & 4 & 9 \end{array}\right) \quad \frac{1}{4}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & \frac{8}{3} & 5 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} & -2 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & \frac{8}{3} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -7 \end{array}\right) \quad \frac{1}{2}$$

$x_3 = 3$ $\frac{1}{2}$

$3x_2 + 8 = 5 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$

$3x_1 + 3 + 12 = 9$

$\Rightarrow 3x_1 = -6$

$\Rightarrow x_1 = -2$

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}$$

2. (a)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$* \quad |C| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & \frac{9}{7}\cdot\gamma_2 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0\cdot\gamma_1 & 0\cdot\gamma_2 & 0\cdot\gamma_3 & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & 0\cdot\gamma_2 & 0\cdot\gamma_3 & \frac{5}{6}\cdot\gamma_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & \frac{9}{7}\cdot\gamma_2 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0\cdot\gamma_1 & 0\cdot\gamma_2 & 0\cdot\gamma_3 & 0 & 0 \\ 0\cdot\gamma_1 & 0\cdot\gamma_2 & 0\cdot\gamma_3 & \frac{5}{6}\cdot\gamma_4 & 0 \end{pmatrix} *$$

$\gamma_1 = \frac{1}{3} < 1$

$\gamma_2 = 0 < 1$

$\gamma_3 = \frac{5}{7} < 1$

$\gamma_4 = 0 < 1$

$\gamma_5 = 0 < 1$

$\therefore$ crit. de Sassenfeld satisfeito

$\Rightarrow$ o metodo de Gauss Seidel converge para a solução de $By = b$ para qq. centro inicial $y^{(0)}$

$$B \cdot y^{(0)} = B \cdot \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ -4 \\ 20 \\ 2 \\ 9.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \| B(y^{(0)}) - b \| = 0.4$$

(b) $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{20}{7} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}8571 \\ 1 \\ 1{,}6667 \end{pmatrix}$

$By^{(0)} = \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ -4 \\ 20 \\ 2 \\ 9{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|By^{(0)} - b\|_\infty = 0{,}4$

$y_1^{(1)} = [0 \; 0 \; \frac{1}{3} \; 0 \; 0] \cdot y^{(0)} + \beta_1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$

$\leadsto \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

Método: 1/2

$y_2^{(1)} = \beta_2 = 1 \quad \leadsto \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

$-\frac{9}{7} - \frac{4}{7} + \frac{20}{7} = \frac{7}{7} = 1$

$y_3^{(1)} = (0 \; -\frac{9}{7} \; 0 \; 0 \; -\frac{5}{7}) \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8 = \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \frac{20}{7} = \cancel{\frac{6}{7} \approx 0{,}8571}$

$\leadsto \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ \cancel{0{,}8571} \; 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \quad y_4^{(1)} = \beta_4 = 1 \leadsto \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ \cancel{0{,}8571} \; 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

$y_5^{(1)} = -\frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{10}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.8333$

$\therefore y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ \cancel{0{,}8571} \; 1 \\ 1 \\ 0.8333 \end{pmatrix}$

1/2

$$B \cdot y^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ \cancel{0{,}8571}\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8333 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}1429 \\ -4 \\ \cancel{1?{,}??97}\ 20{,}1665 \\ 2 \\ 9{,}9998 \end{pmatrix} \Rightarrow \|By^{(1)} - b\|_\infty = \cancel{0{,}1429}\ 0{,}1665$$

k	$y^{(k)}$	$\|y^{(k)} - y^{(k-1)}\|_\infty$	$\|By^{(k)} - b\|_\infty$
0	$\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$	—	$0{,}4$ $\frac{1}{4}$
1	$\begin{pmatrix} 1{,}3333 \\ 1 \\ \cancel{0{,}8571}\ 1 \\ 1 \\ 0{,}8333 \end{pmatrix}$	$0{,}1333$ ~~0,1429~~ $\frac{1}{4}$ < 0.2	$0{,}1665$ ~~0,1429~~ $\frac{1}{4}$ < 0.2

PARE

Resultado: $y^{(1)} \approx y^*$, onde $By^* = b$

(c) Para $x^{(1)} = P y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,3333 \\ 1 \\ \cancel{0,8571} \ 1 \\ 0.8333 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}$

Sabemos que

$$\| A x^{(1)} - b \|_\infty = \| B y^{(1)} - b \|_\infty < 0.2$$

$\therefore$ Podemos escolhare $\hat{x} = x^{(1)}$.

$\frac{1}{4}$

$$\left(x_3^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x_3^{-\frac{1}{2}}$$

3. Considere o sistema não-linear:

$$\begin{cases} x_1 \cdot \cos(x_2) - \dfrac{1}{x_3} & = & -6.4 \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 & = & 4.5 \\ x_1 \cdot \sqrt{x_3} & = & 1.25 \end{cases}.$$

(a) Note que $x^* \in \mathbb{R}^3$ é solução deste sistema não-linear se e somente se $F(x^*) = (0,0,0)^T$ para uma certa função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Qual é esta função F? Seja $x^{(0)} = (2.4, 3.14, 0.25)^T$. Verifique por escrito que $||F(x^{(0)})||_\infty < 0.1$.

(b) Qual é a matriz Jacobiana de F, se F é a função do item anterior?

(c) Suponha que você já gerou $x^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ usando ou o Método de Newton ou o Método de Newton Modificado para encontrar uma aproximação $\tilde{x}$ de um x^* com $F(x^*)$ e nenhum dos dois critérios de parada está satisfeito. Explique como você encontra $x^{(k+1)}$ através da resolução de um sistema linear no

i. Método de Newton;

ii. Método de Newton Modificado.

(a) $$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos(x_2) - \frac{1}{x_3} + 6.4 \\ x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 - 4.5 \\ x_1\sqrt{x_3} - 1{,}25 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{4}$

$$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2.4 \cdot \cos(3.14) - 4 + 6.4 \\ 2.4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0.25 - 4.5 \\ 2.4 \cdot \frac{1}{2} - 1{,}25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0216 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$$||F(x^{(0)})||_\infty = 0.05 < 0.1$$

(b)

$$J(x) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \operatorname{sen}(x_2) & x_3^{-2} \\ 2x_2x_3x_1 & x_1^2x_3 & x_1^2x_2 \\ \sqrt{x_3} & 0 & \frac{1}{2}x_1x_3^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$ $\frac{3}{4}$

(c) (i)

Newton: Dado $x^{(k)}$

Resolve

$$J(x^{(k)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

1/2

Depois

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

(ii) Newton-Modificado

Dado $x^{(k)}$

Resolve $J(x^{(0)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$

Depois $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

1/2

4. Considere a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ plotada nos gráficos seguintes. Tem-se que f' e f'' existem e são contínuas.

   (a) Use os gráficos seguintes para *interpretar gráficamente* ("capriche!") como são encontrados:

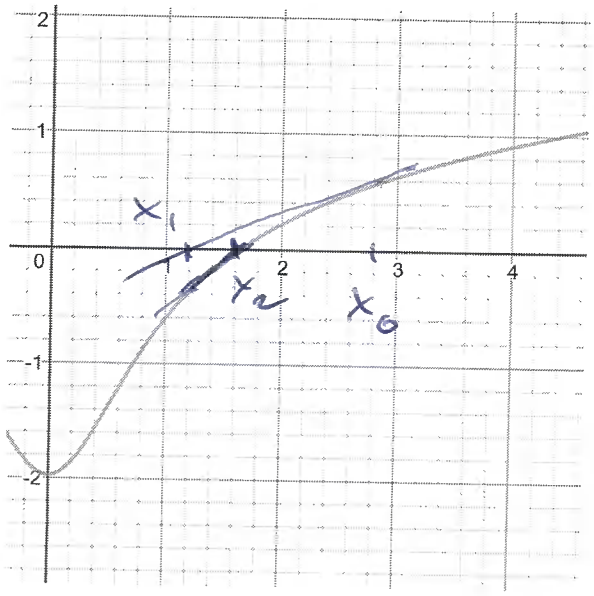


Figura 1: x_1 e x_2 usando o Método de Newton-Raphson a partir de $x_0 = 2.8$;

1/2

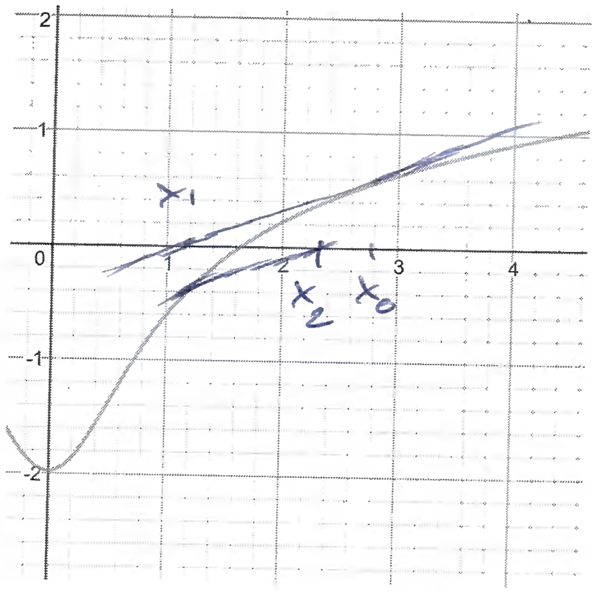
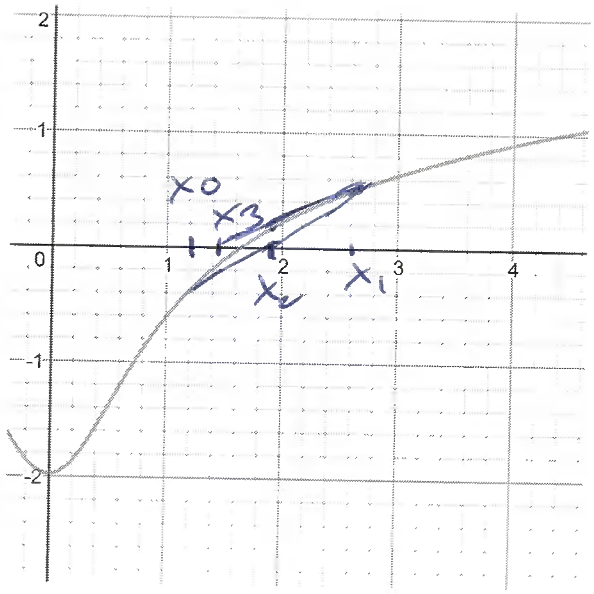


Figura 2: x_1 e x_2 usando o Método de Newton Modificado para o sistema $f(x) = 0$ (note que $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$) a partir de $x_0 = 2.8$;

1/2



$\frac{1}{2}$

Figura 3: x_2 e x_3 usando o Método de Secante para o sistema $f(x) = 0$ (note que $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$) a partir de $x_0 = 1.2$ e $x_1 = 2.6$.

(b) Uma aplicação do Método de Newton-Raphson à função f com chute inicial x_0 gera uma sequencia $x_0, x_1, \ldots$ que converge com ordem quadrática para uma raiz ξ de f. Portanto, se $e_k = x_k - \xi$ para $k = 0, 1, \ldots$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = C.$$

Estime esta constante C usando x_2, x_3 e x_4 da tabela seguinte que foi gerada através de uma aplicação do Método de Newton-Raphson a f com $x_0 = 2.8$ e $\varepsilon = 10^{-3}$.

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	2.8	0.5697	–
1	1.1969	−0.3794	1.6031
2	1.5625	−0.0574	0.3656
3	1.6394	0.0018	0.0769
4	1.6419	0.0000	0.0025

Podemos assumir que $\xi \approx x_4 = 1,6419$ $\frac{1}{4}$

$e_3 = -0.0025$

$e_2 = -0.0794$

Estimamos que $|e_{k+1}| \approx C \cdot e_k^2$

em particular $|e_3| \approx C \cdot e_2^2$ $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow C \approx \frac{|e_3|}{e_2^2} = \frac{0.0025}{0.0794^2} \approx \frac{0.0025}{0.0063} \approx 0.3966$ $\frac{1}{4}$