ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

3ª Prova de MA327 — 19/11/2015, **21:00–23:00 hs**

NOME:______________________________________ **Turma:**______ **RA:**__________________

1. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ com $\dim(\mathcal{V}) < \infty$ e seja $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear.
   (a) (1 pt) Defina os conceitos de um autovalor λ, um autovetor V, o polinômio característico e o autoespaço $\mathcal{E}_\lambda$ de φ.
   (b) (1 pt) Seja $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores de φ. Para $i = 1, \ldots, k$, seja m_i a multiplicidade algébrica de λ_i e seja n_i a multiplicidade geométrica de λ_i. Defina m_i e n_i. Apresente um exemplo de um operador linear $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem um único autovalor λ_1 e $m_1 \neq n_1$.

2. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por $\varphi(X) = AX \ \forall X \in \mathbb{R}^4$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (0.75 pt) Determine o polinômio característico de φ e os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de φ.
   (b) (1.5 pt) Determine uma base do auto-espaço $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ para cada cada auto-valor λ_i de φ.

3. (a) (0.5 pt) Seja $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear, onde $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ com $\dim(\mathcal{V}) = n$. Defina quando φ é diagonalizável. Defina quando uma matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ é diagonalizável.
   (b) (1.25 pt) Considere o operador linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\varphi(X) = AX \ \forall X \in \mathbb{R}^3$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

      i. Encontre os autovalores λ_i e os autoespaccos $\mathcal{E}_{\lambda_i}$ para $i = 1, 2, 3$ de φ sem calcular o polinômio característico (se quiser, utilize um esboço de φ como feito na aula).
      ii. Encontre uma matriz invertível Q e uma matriz diagonal D tal que $A = QDQ^{-1}$.

4. (a) (0.25 pt) Seja $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear, onde $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais com produtos internos $< \cdot, \cdot >_\mathcal{V}$ e $< \cdot, \cdot >_\mathcal{W}$. Defina a transformação linear adjunta $\varphi^* : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$.
   (b) (0.5 pt) Mostre que $A^* = A^T$ para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
   (c) (0.25 pts) Encontre a adjunta A^* da seguinte matriz (aqui $i \in \mathbb{C}$ denota a unidade imaginária que satizfaz $i^2 = -1$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 3+i & 1+i \end{pmatrix}.$$

5. (1.5 pt) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Encontre uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tal que $D = Q^T AQ$.

   Vire a página!

6. (1.5 pt) Responda falso ou verdadeiro justificando :

   (a) Se $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz ortogonal, então Q é uma matriz de rotação .

   (b) Cada matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ é diagonalizável.

   (c) Existe uma matriz (com entradas reais) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ que não tem nenhum autovalor real mas dois autovalores complexos.

   (d) Existe um operador linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que não tem auto-valores reais.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!