Álgebra Linear (MA327) PROVA 2 (25/11/2010)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: Y

Justifique todas as suas respostas. Boa sorte!

---

1. Verifique se os operadores seguintes $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ representam um produtos internos para toda matriz invertivel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (Dica: se A é invertivel então $Ax \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.)

   (a) $[\cdot,\cdot]$ definido por $[x,y] =< Ax, Ay >$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ (aqui $< \cdot, \cdot >$ representa o produto interno usual); [1.5 pts]

   (b) $[[\cdot,\cdot]]$ definido por $[[x,y]] = x^t A y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. [1 pt]

2. Encontre uma base ortonormal para $Span(v_1, v_2, v_3)$ nas situações seguintes:

   (a) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ com produto interno usual, $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_2 = (1,0,0)^t$ e $v_3 = (0,1,0)^t$. [1 pt]

   (b) $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e $v_1 = (1,1,1,1)^t$, $v_2 = (1,0,0,1)^t$ e $v_3 = (0,1,0,1)^t$. [2 pts]

   (c) $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}([0,1])$, onde v_1 é a função constante $\mathbf{0}$, v_2 é a função constante $\mathbf{1}$ e v_3 é a função identidade x. Aqui, $\mathcal{C}([0,1])$ representa o espaço vetorial das funções contínuas $[0,1] \to \mathbb{R}$ com o produto interno dado por $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx \ \forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. [1 pt]

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ com respeito a base canônica $\mathcal{C}$ é dada pela seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 10 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (a) Encontre os autovetores e seus respectivos autovalores de T. [2 pts]

   (b) Diagonalize a matrix A. Em outras palavras, encontre uma matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e uma matriz $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = PDP^{-1}$. [1.5 pts]