Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (27/06/2012)

Nome: _____ RA: _____ Turma: _____

Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas! Boa sorte!

---

1. Cobre é um material muito valorizado na indústria devido a seus excelentes propriedades de condutividade térmica e elétrica. Um modelo de condutividade térmica é dado pela seguinte expressão, onde T denota a temperatura em K (kelvin):

$$k(T) = \frac{1}{\frac{c_1}{T} + c_2 T^2}$$

Para uma pressão de 101325 pascal, temos os valores seguintes de condutividade térmica em milhares de W/m-K (Watts por metro kelvin):

Temperatura em K	5	10	20	30	40	50	60
Condutividade térmica em milhares de W/m-K	19.5	24.3	10.8	4.45	2.17	1.25	0.829

(a) Utilize o método dos Quadrados Mínimos para ajustar a função $k(T)$ aos dados da tabela. [2.5 pts]

(b) Utilize $k(T)$ para estimar a condutividade térmica de cobre em W/m-K numa temperatura de 27 K (com a mesma pressão). [0.5 pts]

2. Considere a seguinte tabela de dados:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

(a) Mostre que $P(x) = 3-2(x+1)+(x+1)x(x-1)$ e $Q(x) = -1+4(x+2)-3(x+2)(x+1)+(x+2)(x+1)x$ interpolam os dados acima. [1 pt]

(b) Providencie um argumento porque $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ sem fazer contas ou manipular equações . [0.5 pts]

(c) Podemos afirmar que $P(x)$ é um spline cúbico que interpola os dados? [0.5 pts]

3. Considere a seguinte integral:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

(a) Aproxime o valor desta integral numéricamente utilizando a regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos. [1 pt]

(b) Estime o valor desta integral usando Quadratura Gaussiana (com dois pontos). [1 pt]

(c) Considerando o fato que erro feito na aproximação da integral usando Quadratura Gaussiana é $E_{QG} = \frac{(b-a)^3 2^4}{3(4!)^3} f^{iv}(\xi)$, para algum $\xi \in (a, b)$,
qual das 2 aproximações (obtidas em (a) e (b)) garante o menor erro em módulo? [0.5 pts]

4. Considere o problema

$$\begin{cases} y'' &= y' + xy \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 2 \end{cases}$$

(a) Transforme este problema em um PVI vetorial. [0.5 pts]

(b) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.1$ para estimar o valor de $y(1.2)$. Qual é o valor encontrado? [2 pts]

ALGUMAS FÓRMULAS E TABELAS

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b - a)]$

$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$, onde $M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$

$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$, onde $M_4 = \max_{x\in[a,b]}|f^{iv}(x)|$

---

x	y	$y' = f(x, y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x, y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$