MS211 - Turma D - Prova 2 - 27/06/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Boa sorte!

1. Considere uma bola de tênis jogada para cima (tosse no saque). Seja $y(t)$ a altura da bola no tempo t e $t_0 = 0$. A equação diferencial que descreve este movimento é $my'' + by' = -mg$, sendo $m = 0.058$ (kg) a massa da bola, $b = 0.93$ (N) a força drag e $g = 9.81$ (m/s^2) a aceleração da gravidade.

   Considere o PVI seguinte:

$$\begin{cases} my'' + by' &= -mg, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 15 \end{cases}$$

   (a) Transforme este problema em um PVI vetorial. Use Y para denotar o vetor composto de y, y'. [0.5 pts]

   (b) Considere $h = 0.1$. Aplique o método de Heun, também conhecido com método de Euler Aperfeiçoado, e preenche todos os espaços marcados com ... da tabela seguinte:

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \ldots\ldots = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = \ldots\ldots$
0	...	...	...	...	...
0.1	...				

   Qual é a estimativa obtida da altura na qual a bola se encontra no tempo $t = 0.1$ s [2 pts]?

2. Geralmente, pode-se observar que a nota obtida numa prova depende do tempo de estudo da matéria e do tempo de atenção (sem dormir, mexer com celular, etc.) na aula. Suponha que $N \in [0, 10]$ e $t \in [0, 30]$ denotam respectivamente a nota e a soma dos tempos de estudo da matéria e de "prestação de atenção". Considere os dados seguintes:

t	5	9	11	19	23	29
N	1	2.5	2	6	9	9.5

Parece razoável assumir que a $N(t)$ pode ser aproximado por uma função logística, quer dizar

$$N(t) \approx \frac{N_M}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha_2 t}},$$

sendo $N_M = 10$.

(a) Utilize o Método dos Quadrados Mínimos para estimar α_1 e α_2. Para tanto, precisa-se "linearizar" o problema no primeiro lugar. Quais são os valores obtidos α_1^* e α_2^*? [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste dado pela soma dos quadrados dos desvios referente ao problema "linearizado". [0.25 pts]

(c) Calcule o residuo do ajuste à função N para $t = 5, 9, 11, 19, 23, 29$ dado pela soma dos quadrados dos desvios. [0.25 pts]

(d) Utilize os valores α_1^* e α_2^* para estimar $N(25)$ [0.25 pts]

3. A figura em cima revela que o valor de mercado de Jude Bellingham aumentou consideravelmente nos últimos anos. A partir da próxima semana, ele será jogador do Real Madrid. A tabela seguinte mostra valores de mercado deste jogador de futebol em milhões de Euro às $0:00$ hs em certas datas de 2022 e 2023. Para facilitar a resolução das questões seguintes, você deve atribuir números consecutivos para os dias começando com o dia 01/06/22 que corresponde ao dia # 1.

d = Dia #	9	113	162	206	296
Data	09/06/22	21/09/22	09/11/22	23/12/22	29/03/23
v = Valor de Mercado	80	90	100	110	120

(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* para estimar o valor de mercado do Jude Bellingham no dia 31/01/23, quer dizer no dia # 245. [1 pt]

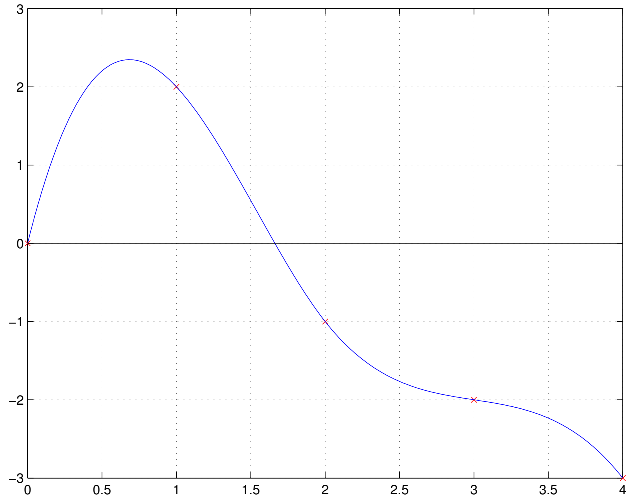
(b) Utilize interpolação polinomial *quadrática inversa* para estimar a data na qual o Jude Bellinham atingiu um valor de mercado de 103 milhões de Euro, o valor pago pelo Real Madrid para o Borussia Dortmund (desconsiderando futuros acrescimos). [1 pt]

4. As figuras seguintes mostram uma função contínua f cuja integral no intervalo $[0, 4]$ queremos estimar.

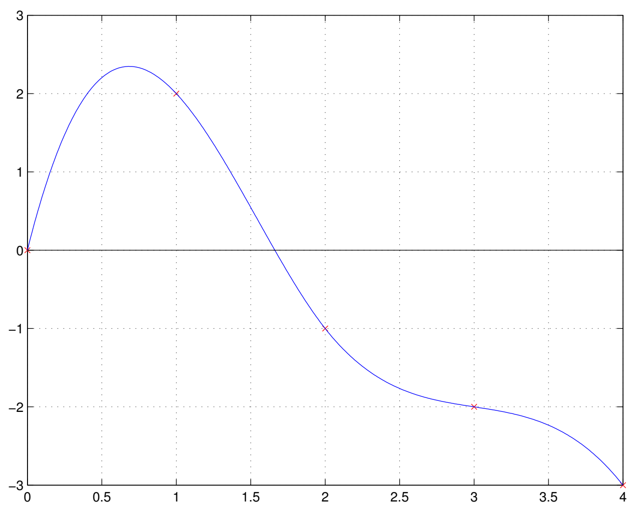
   (a) Utilize a figura seguinte para esboçar regiões R_+ e R_- tal que o resultado da Regra dos Retângulos Repetida com 2 subintervalos corresponde a

$$A_+ - A_-$$

   sendo A_+ e A_- as áreas de R_+ e R_-, respectivamente. Qual é o resultado da aplicação da Regra dos Retângulos Repetida com 2 subintervalos conforme a sua interpretação gráfica? [0.5 pts]



   (b) Utilize a figura seguinte para *esboçar* (sem calcular) regiões R_+ e R_- tal que o resultado da Regra de Simpson 1/3 Repetida com 2 subintervalos corresponde a $A_+ - A_-$, sendo A_+ e A_- as áreas de R_+ e R_-, respectivamente.



Vire a página!

Qual é a estimativa de $\int_0^4 f(x)dx$ produzida pela Regra de Simpson 1/3 Repetida com 2 subintervalos de acordo com a seguinte fórmula? [1 pt]

$$\frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n).$$

(c) A Quadradura Gaussiana para $\int_a^b f(x)dx$ com $n = 1$ fornece a estimativa

$$G_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\Big(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right) + f\left(\frac{1}{2}\Big(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}}\Big)\right)\right].$$

Aplique a Quadradura Gaussiana com $n = 1$ duas vezes gráficamente para estimar $\int_0^2 f(x)dx$ e para estimar $\int_2^4 f(x)dx$. Para tanto, determine $\frac{1}{2}(a+b-\frac{b-a}{\sqrt{3}})$ e $\frac{1}{2}(a+b+\frac{b-a}{\sqrt{3}})$ nestes dois casos.

Em seguida interprete a estimativa correspondente de $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$ gráficamente em termos de $A_+ - A_-$, sendo A_+ e A_- as áreas de certas regiões R_+ e R_-, respectivamente. [1 pt]