ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

2ª Prova de MA327 — 22/10/2015, **21:00–23:00 hs**

NOME:______________________________ **Turma:**______ **RA:**_____________

1. (a) (0.5 pt) Considere uma função $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, onde $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vetorias sobre um corpo $\mathbb{F}$. Escreva condições suficientes para que φ seja uma transformação linear.
   (b) (1 pt) Quais das seguintes funções são transformações lineares :
      i. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $\varphi((x,y)^T) = (x-1, y, 0)^T$;
      ii. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $\varphi((x,y)^T) = (x-y, x+y)^T$;
      iii. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $\varphi((x,y)^T) = (x^2, 0, y)^T$.
   (c) (0.5 pt) Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $\varphi((1,1)^T) = (0,-1)^T$, $\varphi((1,0)^T) = (0,1)^T$. Determine $\varphi((1,-2)^T)$.

2. Seja $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear.
   (a) (0.5 pt) Defina o núcleo $\mathcal{N}(\varphi)$ e a imagem $Im(\varphi)$. Utilizando $\mathcal{N}(\varphi)$ e $Im(\varphi)$, escreve condições necessárias e suficientes para que φ seja um isomorfismo.
   (b) (0.5) Seja $\mathcal{B} = \{V_1, \dots, V_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{C} = \{W_1, \dots, W_m\}$ uma base de $\mathcal{W}$. Defina a matriz $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ (denotado por $[T]_B^C$ pelo Reginaldo) da transformação linear φ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

3. Seja $\mathbb{R}^{2\times 2}$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 com entradas reais e seja $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a transformação linear dada por $\varphi(M) = M - M^T$.
   (a) (1 pt) Calcule uma base de $Im(\varphi)$ e use $posto(\varphi) = \dim(Im(\varphi))$ para determinar $\dim(\mathcal{N}(\varphi))$.
   (b) (0.5 pt) Utilize (a) para verificar se φ é sobrejetivo ou injetivo.
   (c) (0.5 pt) Calcule uma base de $\mathcal{N}(\varphi)$.

4. (3.0 pt) Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que
   $$\varphi((1,0,0)^T) = (0,1,-1)^T,\ \varphi((0,1,0)^T) = (1,0,0)^T,\ \varphi((0,0,1)^T) = (1,0,2)^T.$$
   (a) (0.5 pt) Seja $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$, onde $E_1 = (1,0,0)^T, E_2 = (0,1,0)^T, E_3 = (0,0,1)^T$. Encontre a matriz $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ que representa φ em relação a base $\mathcal{C}$.
   (b) (1 pt) Seja $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, V_3\}$, onde $V_1 = (1,1,1), V_2 = (1,1,0), V_3 = (1,0,1)$. Encontre a matriz $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ que representa φ em relação a base $\mathcal{B}$.
   (c) (1 pt) Encontre uma matriz invertível P tal que $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} P$. Determine P^{-1} sem calcular explicitamente a inversa de P.
   (d) (0.5 pt) Encontre a matriz que representa $\varphi \circ \varphi$ em relação a base $\mathcal{B}$.
   (e) (0.5 pt) Verifique se φ^{-1} existe.

   Veja Questão 5 no verso!

5. (2.0 pt) Responda falso ou verdadero (justificando):

   (a) Se $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz associada à uma transformação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ referente a bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$, então $\varphi = id$ $(id(V) = V \ \forall V \in \mathbb{R}^2)$.

   (b) Existe uma transformação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{N}(\varphi) = \{(1,1)^T\}$.

   (c) A transformação linear derivada $\delta : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, dada por $\delta(p) = p'$, é injetiva.

   (d) O posto da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é 2.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!