MS211 - Turma Y - Prova 1 - 26/09/2017

Nome: RA:

Trabalhe com 4 *dígitos decimais* exceto na Questão 2!
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS!!! **Boa prova!**

---

1. Considere a equação não linear $f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$.

   (a) (0.5 pt) Verifique algébricamente que existe uma única raíz ξ e esboce o gráfico de f.

   (b) (1 pt) Seja ξ a raiz encontrada em (a). Considere o método de Newton-Raphson. Supondo que $x_0 \neq \xi$, escreve a equação que relaciona x_{k+1} com x_k para todo $k = 0, 1, \ldots$. Seja $e_k = x_k - \xi$. Utilize e_k e e_{k+1} para provar que, neste caso, a ordem de convergência do método de Newton-Raphson é linear.

   (c) (0.25 pt) Suponha que o método de Newton-Raphson aplicado a uma função $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ gera uma seguência que converge para uma raiz ξ de g. Quando podemos afirmar que a ordem de convergência é quadrática?

   (d) (0.75 pt) Faça 2 iterações do método de Newton-Raphson partindo do ponto $x_0 = 1.1$, i.e., calcule x_1 e x_2. Não é necessário verificar os critérios de parada.

2. Assume que a decomposição LU de uma matriz A com pivoteamento parcial resultou nas matrizes seguintes:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Além disso, considere os vetores seguintes:

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -49 \\ -1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ e } d = \begin{pmatrix} -49 \\ -2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

   Responde às questões seguintes **sem calcular as entradas de** A!

   (a) (0.5 pt) Calcule o determinante de A (Dica: $\forall B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem-se $\det(BC) = \det(B)\det(C)$).

   (b) (1.5 pt) Utilize somente P, L e U para resolver $Ax = b$.

   (c) (0.5 pt) Sabendo-se que $Az = c$, utilize o vetor x encontrado no item anterior para encontrar um vetor t tal que $At = d$ (Dica: note que $d = c + b$).

Veja as questões no verso!

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e $b \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i-1, & \text{se } i = j \\ i-j, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $b_i = 2i - 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) (0.5 pt) Escreve A e b.

(b) (1 pt) Podemos afirmar que o critério das linhas ou o critério de Sassenfeld está satisfeito? O que a resposta a esta pergunta implica para a convergência dos métodos de Gauss-Jordan e de Gauss-Seidel?

(c) (1.5 pt) Aplique o método de Gauss-Seidel a este sistema linear com o chute inicial $x^{(0)} = (2, 1, 1, 1)^t$. Utilize o critério de parada apresentada na aula com $\varepsilon = 0.2$ e coloque os resultados usando a seguinte forma tabelar:

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty}$$

Lembre-se que $||v||_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

4. A concentração de um poluente num lago depende do tempo t, e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Foram feitas algumas medidas, de modo que $C(1) = 27.5702$ e $C(2) = 17.6567$.

(a) (0.5 pts) Escreve um sistema não-linear de 2 equações nos variáveis β e ω.

(b) (1.5 pts) Utilizando o item anterior, aplique o método de Newton com a aproximação inicial $x^{(0)} = (\beta_0, \omega_0)^t = (-1.9, -0.11)^t$ com precisão $\varepsilon = 0.1$. Pare assim que um dos 2 critérios de parada está satisfeito e preenche uma tabela da forma seguinte. Exibe todas as contas!

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$