

MS211 - Turma M - Prova 1 - 27/06/2023

Nome:

RA:

Utilize **4 dígitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. A fatoração LU é comumente utilizada no método de Newton Modificado para resolver sistemas de equações não-lineares que podem ser expressados na forma $F(\mathbf{x}) = (0, 0, \dots, 0)^T$. A fatoração LU com pivoteamento da matriz jacobiana no ponto $\mathbf{x}^{(0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$ de uma certa função $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$F(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0.5280 \\ 0.2000 \\ -0.1894 \end{pmatrix}.$$

para o chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0.2, 0, -0.5)^T$ resultou nas matrizes L , U e P seguintes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 16.1867 & 0.9042 \\ 0 & 0 & 19.9978 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Qual é a relação entre $J(\mathbf{x}^{(0)})$ e as matrizes L , U e P ? Responda a esta pergunta sem fazer cálculos. [0.25 pts]
- (b) Utilize as matrizes L , U e P acima para resolver o sistema linear $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(0)} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ de acordo com a metodologia sugerida na aula (sem calcular $J(\mathbf{x}^{(0)})$, etc.). [1.5 pts]
- (c) Considerando o valor $\|\mathbf{s}^{(0)}\|_\infty$, $\mathbf{x}^{(0)}$ parece ser um bom chute inicial? [0.25 pt]
- (d) Calcule o determinante de $J(\mathbf{x}^{(0)})$ usando somente os determinantes das matrizes L , U e P . [0.25 pts]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente $A\mathbf{x} = b$ se e somente se $\mathbf{x} = (0, 0)^T$.

(a) Verifique se o critério das linhas está satisfeito. Quais são as consequências para a convergência de cada um dos métodos seguintes?

- i. O método de (Gauss-)Jacobi;
- ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pts]

(b) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^T$. Aplique 2 iterações do método de (Gauss-)Jacobi e gere $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ usando a fórmula $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + g$ para algum $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e algum $g \in \mathbb{R}^2$. Qual é a sua conclusão referente à convergência de $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$? [0.5 pts]

(c) Verifique se o critério de Sassenfeld está satisfeito. O que você pode afirmar referente às consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

- i. O método de (Gauss-)Jacobi;
- ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.5 pt]

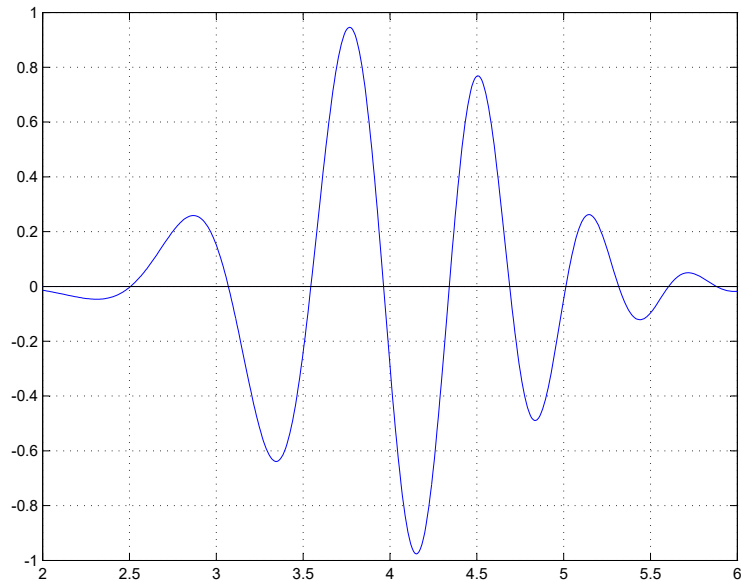
(d) Utilize a matriz C e o vetor g do item (b) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ aplicando o método de Gauss-Seidel ao sistema $A\mathbf{x} = b$ com chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2)^T$. Exiba os vetores intermediários. Qual é a sua conclusão referente à convergência do método de Gauss-Seidel neste caso? [1 pt]

(e) Faça uma interpretação gráfica do item anterior mostrando as retas, os pontos e as transições do ponto anterior para o próximo. As referidas transições devem ser visualizadas usando flechas. [0.5 pt]

3. A técnica chamada “zero-crossing” é um dos métodos que permite avaliar o tempo de atraso da propagação de ondas. Tendo em vista esta observação, considere um sinal de onda dado pela equação seguinte:

$$e^{-(x-4)^2} \sin(x^2) = 0. \quad (1)$$

A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x) = e^{-(x-4)^2} \sin(x^2)$ no intervalo $[2, 6]$.



- (a) Faça uma interpretação gráfica de uma iteração do método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = 4$ e obtenha x_1 graficamente. [0.25 pts]
- (b) Suponha que o método de Newton-Raphson é aplicado usando o critério de parada $|f(x_k)| < 0.1$ ou $|x_k - x_{k-1}| < 0.1$. Quantas iterações são necessários até este critério de parada é atingido segundo o seu gráfico? Justifique a sua resposta. [0.25 pts]
- (c) Considerando o chute inicial $x_0 = 4$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k . Sugere-se simplificar as expressões obtidas. [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $
0	4		—
1			

- (d) Sob certas condições, sabe-se que o método de Newton-Raphson produz uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge com ordem pelo menos quadrática para uma raiz ξ de f . Qual é o significado da afirmação que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge com ordem de convergência quadrática para ξ ? [0.25 pt]

4. Considere o problema de encontrar os valores de x e y que minimizem a função

$$f(x, y) = (x - y)^2 + [-x^2 - 2 + 2y]^2.$$

Seja $\mathbf{z} = (x, y)^T$. Sugere-se resolver o sistema não-linear seguinte:

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{z}) = g_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ g_2(\mathbf{z}) = g_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Seja $G(\mathbf{z}) = (g_1(\mathbf{z}), g_2(\mathbf{z}))^T$.

- (a) Determine as derivadas parciais na equação em cima e escreva o sistema não-linear por extenso. [0.25 pts]
 (b) Utilizando o item anterior, execute 1 passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{z}^{(0)} = (x_0, y_0)^T = (1, 1)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular qual é a matriz Jacobiana $J(\mathbf{z}) = J(x, y)$ e como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{z}^{(1)}$. Verifique que $\|G(\mathbf{z}^{(1)})\|_\infty = 0$. [1.75 pts]

k	$\mathbf{z}^{(k)}$	$G(\mathbf{z}^{(k)})$	$\ G(\mathbf{z}^{(k)})\ _\infty$	$\ \mathbf{s}^{(k-1)}\ _\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	—	...
1

- (c) A figura em baixo mostra os gráficos das funções $p(x) = -x^2 - 2$ e $r(x) = -2x$. Marque as localizações dos pontos $(x_1^{(1)}, (x_1^{(1)})^2)$ e $(y_1^{(1)}, 2y_1^{(1)})$, sendo $x_1^{(1)}$ e $y_1^{(1)}$ as entradas de $\mathbf{z}_1^{(1)}$ obtido no item anterior. Qual é a sua observação referente a estes dois pontos? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]

