MS211 - Turma D - Prova 1 - 02/05/2023

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Boa sorte!

1. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.6154 & 0 \\ -0.7919 & 0 & 0.9218 \\ 0 & -0.7382 & 0.1763 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0.2076 \\ -0.4556 \\ -0.6024 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine as matrizes L, U e P da fatoração LU com pivoteamento parcial de A. [1.5 pts]

   (b) Utilize L, U e P para determinar a solução de $Ax = b$ através da resolução de dois sistemas triangulares. [1 pt]

2. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0.7095 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5681 & 0.4289 & 0 & 0.1897 \\ 0 & -0.3704 & 0.1934 & 0 \\ 0.6822 & 0 & 0 & 0.3028 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.5341 \\ 0.7271 \\ 0.3093 \\ 0.8385 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique se o critério de Sassenfeld está satisfeito. O que você pode afirmar referente as consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

  i. O método de (Gauss-)Jacobi;

  ii. O método de Gauss-Seidel.

  [1.25 pts]

(b) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema $Ax = b$ com chute inicial $x^{(0)} = (1, 2, 6, 1)^T$. Exibe os vetores intermediários e preenche os ... na tabela seguinte. Seja $\varepsilon = 0.1$. Verifique que $||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty < \varepsilon$ ou $||Ax^{(1)} - b||_\infty < \varepsilon$. [1.25 pts]

k	$x^{(k)}$	$\lvert\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)}\rvert\rvert_\infty$	$\lvert\lvert Ax^{(k)} - b\rvert\rvert_\infty$
0	...	−	...
1	...	...	...

3. Quando um fluido escoa de um ponto para outro no interior de um tubo, haverá sempre uma perda de energia devida ao atrito do fluido com a superfície interna da parede do tubo e turbulências no escoamento do fluido. Em 1939 se estabeleceu definitivamente uma lei para fator de atrito a através da equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = -2\log_{10}\left(\frac{R_r}{3.7} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{a}}\right). \tag{1}$$

Nesta equação, R_r se refere à rugosidade relativa e R_e se refere ao número de Reynolds. Suponha que $R_r = 0.01$ e $R_e = 5000$. Suponha que, devido à sua experiência nesta área de engenharia, você sabe que o fator de atrito correspondendo a estes valores de R_r e R_e é mais ou menos 0.045. Para simplificar, seja $c = R_r/3.7$ e seja $d = 2.51/R_e$.

(a) Escreve a Equação 1 acima na forma $f(a) = 0$. Aplique o método de secante com chutes iniciais $a_0 = 0.045$ e $a_1 = 0.05$ e precisão $\varepsilon = 10^{-3}$. Pare se $|f(a_k)| < \varepsilon$ ou se $|a_k - a_{k-1}| < \varepsilon$. Apresente os detalhes necessários e coloque a sua solução na forma tabelar em baixo. Qual é a aproximação obtida do fator de atrito a? [1.25 pts]

k	a_k	$f(a_k)$	$\|a_k - a_{k-1}\|$
0	0.045		$-$
1	0.05		

(b) Substitue $\frac{1}{\sqrt{a}}$ por x e escreve a Equação 1 na forma $g(x) = 0$. Aplique o método de Newton-Raphson com chute inicial $x_0 = \frac{1}{\sqrt{0.045}}$ e precisão $\varepsilon = 10^{-3}$. Pare se $|g(x_k)| < \varepsilon$ ou se $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Apresente os detalhes necessários e coloque a sua solução na forma tabelar em baixo (dica: $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$). Qual é a aproximação obtida do fator de atrito a? [1.25 pts]

k	x_k	$g(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0			$-$

4. A concentração de um poluente num lago depende do tempo t, e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Foram feitas algumas medidas, de modo que $C(1) = 27.5702$ e $C(2) = 17.6567$.

(a) Escreve um sistema não-linear de 2 equações nas variáveis β e ω [0.25 pts].

(b) Utilizando o item anterior, execute 2 passos do método de Newton com a aproximação inicial $x^{(0)} = (\beta_0, \omega_0)^t = (-1.9, -0.11)^t$ e preenche os ... na tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular qual é a matriz Jacobiana, como foram obtidos $s^{(0)}$, $s^{(1)}$ e $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. [1.5 pts]

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$
0	...	...	...	–	...
1	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	

(c) Lembre-se que no método de Broyden, usa-se aproximações $B^{(k)}$ de $J(x^{(k)})$. Além disso, o método de Broyden é igual ao método de Newton. Suponha que $B^{(0)} = J(x^{(0)})$. Para obter $B^{(k+1)}$ a partir de $B^{(k)}$, faça

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} + \frac{1}{s^{(k)^T} s^{(k)}} F(x^{(k)}) s^{(k)^T}.$$

Execute o segundo passo do método de Broyden com a aproximação inicial $x^{(0)} = (\beta_0, \omega_0)^t = (-1.9, -0.11)^t$ e preenche os ... na tabela seguinte. Note que as entradas no ínicio da tabela em baixo são iguais àquelas da tabela do método de Newton e por isto não precisam ser preenchidas. Explique como você fez as contas, em particular como foram obtidos $s^{(1)}$ e $x^{(2)}$. [0.75 pts]

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$
0				–	
1					...
2	...	...	...	...	