MS211 - Turma D - Prova 1 - 28/04/2026

Nome: RA: Número de Faltas:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões **exceto a Questão 2**, que deve ser resolvida usando *frações*! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Faça somente o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. (a) Qual é o método numérico de resolução de sistemas não-lineares no qual o método de fatoração LU (com pivoteamento) é geralmente utilizado? Qual é o benefício de utilizar o método de fatoração LU na aplicação desse método de resolução de sistemas lineares? [0.5 pt]

   (b) Considere o sistema linear seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 0.92 & 4.8 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determine a fatoração LU COM pivoteamento de A usando o vetor p e as matrizes $R^{(i)}$ e $R^{(i)'}$ como ensinado na aula. Quais são as matrizes L, U e P resultantes? [1.5 pts]

   (c) Considere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b}$ qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$. Como se usa L, U e P para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Qual é o primeiro e qual é o segundo sistema linear a ser resolvido? [0.5 pt]

2. Utilize frações para resolver essa questão. Considere o sistema linear seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Gere a matriz C e o vetor $\mathbf{g}$ utilizados no método de (Gauss-)Jacobi. [0.25 pt]

(b) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$ (note que $||A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}||_\infty = 1$). Aplique uma iteração do método de (Gauss-)Jacobi usando C e $\mathbf{g}$ do item (a) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ e calcule $||A\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}||_\infty$. [0.5 pts]

(c) Utilize a matriz C do item (a) para verificar se o critério de Sassenfeld é satisfeito. O que você pode afirmar referente às consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

  i. O método de (Gauss-)Jacobi;

  ii. O método de Gauss-Seidel.

  [0.75 pt]

(d) Utilize a matriz C e o vetor $\mathbf{g}$ do item (a) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ através do método de Gauss-Seidel com chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$. Exibe os vetores intermediários. Em seguida, calcule $||A\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}||_\infty$. [1 pt]

3. Considere a seguinte equação não-linear:

$$e^x = x^2. \tag{1}$$

(a) Quantas soluções tem a Equação (1)? Justifique a sua resposta através de um gráfico. [0.25 pts]

(b) Use uma função f para reescrever a Equação (1) em uma forma que permite a aplicação do método de Newton-Raphson. Considerando o chute inicial $x_0 = 0$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. [1.75 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0		$-$
1			
2			

(c) Sob algumas condições, a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo método de Newton-Raphson converge para um ponto fixo de uma certa função φ. O que é um ponto fixo de uma função real φ? Qual é a função φ no caso do método de Newton-Raphson? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]

4. Deve ser construída uma embalagem de leite com capacidade para 1 litro a partir de uma folha de cartão encerado com uma sobreposição de 5 mm. O requisito é que seja utilizada a menor área de superfície possível, a ser determinada em mm^3, para a embalagem. Sejam w, b e h a largura, a profundidade e a altura, respectivamente, da embalagem. (Veja as figuras na próxima folha.) A área total da superfície, A, é dada por

$$A = (2b + 2w + 5)(h + b + 10).$$

Uma vez que um litro equivale a 10^6 mm^3, segue que $hbw = 10^6$ e portanto $w = \frac{10^6}{hb}$. Se considerarmos $\mathbf{x} = (b, h)^T$ como o vetor de duas incógnitas, b e h, a área da superfície pode então ser expressa como

$$A(\mathbf{x}) = (h + b + 10)\Big(\frac{2 \cdot 10^6}{hb} + 2b + 5\Big).$$

A minimização desta função implica igualar as suas derivadas parciais a zero, o que dá

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial b} A(b, h) = 4b + 2h + 25 - \frac{2 \cdot 10^6}{b^2}\Big(1 + \frac{10}{h}\Big) = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial h} A(b, h) = 2b + 5 - \frac{2 \cdot 10^6}{h^2}\Big(1 + \frac{10}{b}\Big) = 0. \end{cases}$$

Seja $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))^T$. Suponha que você já determinou as derivadas parciais seguintes:

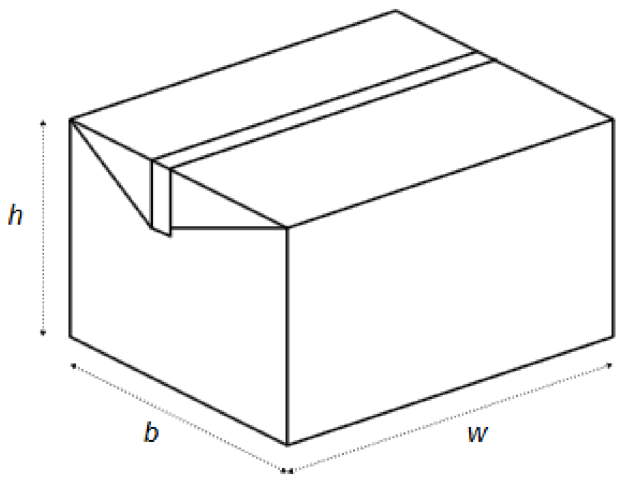
$$\frac{\partial}{\partial b} f_1(\mathbf{x}) = 4 + \frac{4 \cdot 10^6}{b^3}\Big(1 + \frac{10}{h}\Big), \ \frac{\partial}{\partial h} f_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial b} f_2(\mathbf{x}) = 2 + \frac{20 \cdot 10^6}{h^2 b^2}, \ \frac{\partial}{\partial h} f_2(\mathbf{x}) = \frac{4 \cdot 10^6}{h^3}\Big(1 + \frac{10}{b}\Big).$$

(a) Execute um passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (b_0, h_0)^T = (60, 130)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Para simplificar essa tarefa, $F(\mathbf{x}^{(0)}) = (-73.2906, -13.0671)^T$ já foi calculado. Explique como você fez as contas e como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{x}^{(1)}$. [1.5 pts]

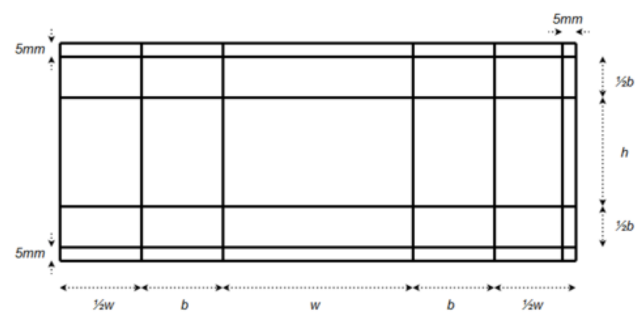
k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$F(\mathbf{x}^{(k)})$	$\|\|F(\mathbf{x}^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|\mathbf{s}^{(k-1)}\|\|_\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	...	...	...	–	...
1	...	...	...	...	

(b) Sabemos que o primeiro passo do método de Newton Modificado é identico àquele do método de Newton. Considere $\mathbf{x}^{(1)}$ do item anterior. Utilize o método de Newton Modificado para gerar $\mathbf{x}^{(2)}$. Justifique a sua resposta. (Não precisa usar o método de fatoração LU para resolver o sistema linear que surge nessa questão.) [0.75 pt]

(c) Quais são as estimativas para a largura w, a profundidade b e a altura h obtidas no item (b)? [0.25 pt]



(a) Perspectiva isométrica da embalagem de leite, mostrando as dimensões de largura (w), profundidade (b) e altura (h).



(b) Plano de corte detalhado para fabricação (cartão encerado), exibindo as sobreposições de 5 mm e as dimensões parciais baseadas em b, h, w. A base total é $2b + 2w + 5$ e a altura total é $h + b + 10$.