Problemas de Valor de Contorno

O Método das Diferenças Finitas

Consideramos problemas de 2^a ordem da forma

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$a_1 y(a) + b_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$a_2 y(b) + b_2 y'(b) = \gamma_2$$

onde $a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$

e a_i ou $b_i \neq 0$, $i = 1, 2$

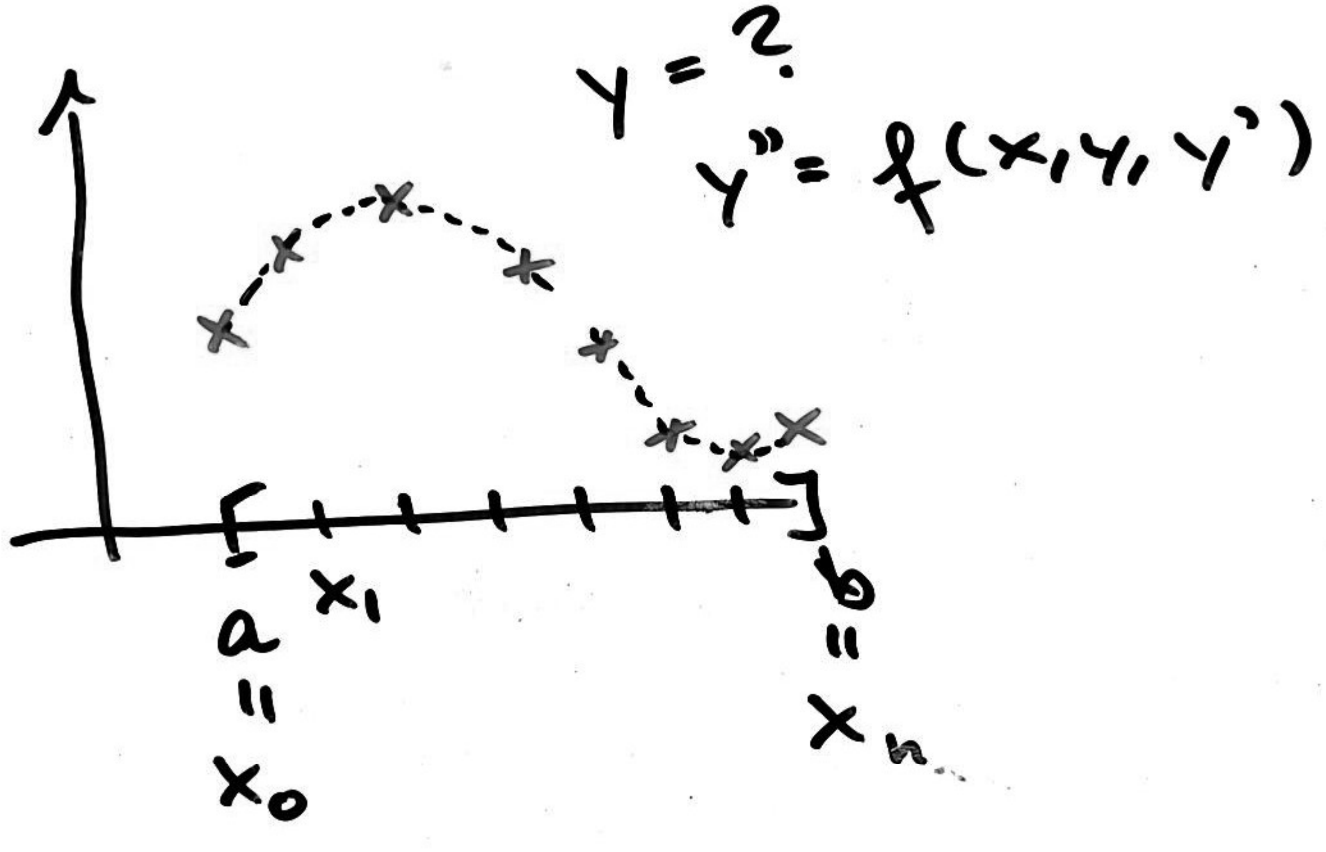
Def.: Uma função $g(h)$ é $O(h^p)$

$\iff \exists\, C > 0$ tal que $|g(h)| \leq C \cdot h^p$ $\forall h$

Exemplo:

Considere uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem da forma

$$\underline{\text{PVC}}: \quad y''(x) = f(x, y, y')$$
$$y(a) = y_1$$
$$y(b) = y_2$$



Ideia do Mét. das Diferenças Finitas:

Substituir as 1ªs e 2ªs derivadas no PVC por aproximações (em termos de diferenças) baseadas na série de Taylor

Aprox's da 1ª derivada

(1) $$y'(x_k) \cong \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}$$

(diferença avançada)

(2) $$y'(x_k) \cong \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h}$$

(diferença atrasada)

(3) $$y'(x_k) \cong \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h}$$

(diferença centrada)

Lembre-se:

Para $f \in C^{n+1}$ temos $\forall x$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

para algum $\xi \in [x, x+h]$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \ldots + \frac{(-h)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

para algum $\xi \in [x-h, x]$

Então:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(\xi)$$

para algum $\xi \in [x, x+h]$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

(diferença avançada)

Similarmente,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

(diferença retrasada)

$$f(x+h) - f(x-h) =$$

$$= 2h\, f'(x) + \frac{h^3}{3} \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{2}$$

Se $f \in C^3$, $\exists\, \xi$ tal que

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{2}$$

Então,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2} + O(h^2)$$

Finalmente,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

para $p=1$ e $x=x_{k+1}$:

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+y'(x_k)\cdot h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

para algum $\xi\in[x_k,x_{k+1}]$

$$\Rightarrow y'(x_k)=\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h} - y''(\xi)\cdot\frac{h}{2}$$

para algum $\xi\in[x_k,x_{k+1}]$

Supor $y''(x)$ é limitada em $[a,b]$ (por ex. $y''(x)$ contínua em $[a,b]$)

$\Rightarrow \exists M>0$ tal que $|y''(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$

Então:

$$\left|y'(x_k)-\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}\right|\le M\cdot\frac{h}{2}$$

$$= \left| \frac{y''(\xi)}{2} \cdot h \right| \leq \frac{M}{2} \cdot h$$

$$\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Então, o erro de truncamento

$$y'(x_k) - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}$$ cometido na diferença avançada é $O(h)$

Similarmente

$$y'(x_k) - \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h} \text{ é } O(h)$$

$$y'(x_k) - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} \text{ é } O(h^2)$$

Aprox. para a 2ª derivada

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2}$$

vem da série de Taylor e

o erro de truncamento é $O(h^2)$

Seja $f_h(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\Rightarrow |f_h(x) - f'(x)| = \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

para algum $\xi \in [x, x+h]$

Se $|f''(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in [x, x+h]$

$$|f_h(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{2} \cdot h$$

Mas, na prática temos

$$\hat{f}(t) = f(t) + e(t) \quad \forall t$$

Suponha que $|e(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t$

Daí, $|\hat{f}_h(x) - f_h(x)|$

$$= \frac{|e(x+h) - e(x)|}{h} \leq \frac{2\varepsilon}{h}$$

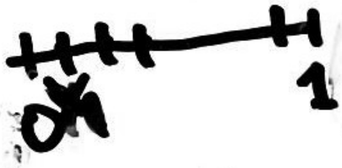
$$\Rightarrow |f_h(x) - f'(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{M}{2} h$$

<u>Exemplo (PVC linear)</u>

$$2y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x$$

$y(0) = -3$ $\qquad$ $y(x) = x - 3$

$y(1) = -2$ $\qquad$ é sol. exata



$h = 0.1$

Vamos gerar y_k, $k = 0, 1, \dots, 10$

? $\quad$ y_{10}^*

$y_k \simeq y(x_k)$ $\quad$ y_0^*

Eq. discretizada

$$2 \cdot \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + 3\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = x_k$$

para $k = 1, 2, \dots, 9$

$$2y_{k+1} - 4y_k + 2y_{k-1} + \tfrac{3}{2}h\,y_{k+1} - \tfrac{3}{2}h\,y_{k-1}$$
$$+ h^2 y_k = h^2 x_k$$

Aqui temos $x_k = k \cdot h$:

$$\boxed{\left(2 + \tfrac{3}{2}h\right) y_{k+1} + (h^2 - 4)\,y_k + \left(2 - \tfrac{3}{2}h\right) y_{k-1} = k \cdot h^3}$$

Para $k=1$ temos $y_{k-1}=y_0=y(x_0)=-3$:

$$\left(2+\frac{3}{2}h\right)y_2+(h^2-4)y_1+\left(2-\frac{3}{2}h\right)(-3)=h^3$$

$$\boxed{\left(2+\frac{3}{2}h\right)y_2+(h^2-4)y_1=h^3-\frac{9}{2}h+6}$$

Para $k=9$ temos $y_{k+1}=y_{10}=y(x_{10})=-2$:

$$\left(2+\frac{3}{2}h\right)(-2)+(h^2-4)y_9+\left(2-\frac{3}{2}h\right)y_8$$
$$=9h^3$$

$$\Rightarrow \boxed{(h^2-4)y_9+\left(2-\frac{3}{2}h\right)y_8=9h^3+3h+4}$$

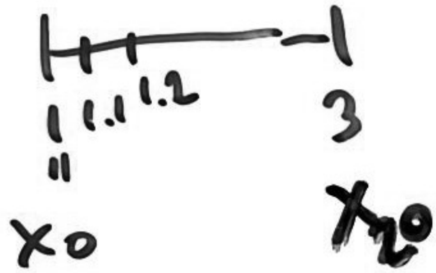
$$\therefore \begin{pmatrix} h^2-4 & 2+\frac{3}{2}h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2-\frac{3}{2}h & h^2-4 & 2+\frac{3}{2}h & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 2+\frac{3}{2}h \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2-\frac{3}{2}h & h^2-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^3-\frac{9}{2}h+6 \\ 2h^3 \\ 3h^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ 8h^3 \\ 9h^3+3h+4 \end{pmatrix}$$

Exemplo (PVC não-linear)

Considere $y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$

$$y(1) = 17$$

$$y(3) = \frac{43}{3}$$



Confira que

$y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ é sol. exata do PVC acima.

Seja $h = 0.1$. Calcule $y_k \approx y(x_k)$

$k = 0, 1, 2, \ldots, 20$

já temos y_0, y_{20}, vamos calcular $y_1, \ldots, y_{19}$ utilizando

$$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

(erro de trunc. é $O(h^2)$)

para $k=1,2,\ldots,19$ obtemos

$$\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=\frac{1}{8}\left(32+2x_k^3-y_k\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}\right)$$

$$\Leftrightarrow y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}=\frac{h^2}{8}\left(32+2x_k^3-y_k\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}\right)$$

Utilizando $x_k=1+k\cdot h$

$$\frac{h^2}{4}\left(16+(1+kh)^3\right)-\frac{h}{16}y_ky_{k+1}+\frac{h}{16}y_ky_{k-1}$$

$$-y_{k+1}+2y_k-y_{k-1}=0$$

para $k=1$, $y_{k-1}=y_0=y(x_0)=17$:

$$\frac{h^2}{4}\left(16+(1+h)^3\right)-\frac{h}{16}y_1y_2+\left(\frac{17h}{16}+2\right)y_1$$

$$-y_2-17=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2}{4}\left(16+(1+h)^3\right)-17\ \ldots\ldots$$

para $k=19$, $y_{k+1} = y_{20} = y(\cancel{x_{20}}) = \frac{43}{3}$
x_{20}

$$\frac{h^2}{4}(16+(1+19h)^3) - \frac{h}{16} y_{19} \cdot \frac{43}{3} + \frac{h}{16} y_{19} y_{18}$$

$$-\frac{43}{3} + 2y_{19} - y_{18} = 0$$

Supor que o problema é

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$$

$$y(1) + y'(1) = 3$$

$$y(3) = \frac{43}{3}$$

Neste caso, não temos $y_0 = y(x_0)$

Podemos fazer o seguinte

(1) Utilizar diferença avançada para

$y'(x_0) \simeq \frac{y_1 - y_0}{h}$ e expressar y_0 em termos de y_1.

(2) Continuar utilizando diferença centrada e introduzir uma nova variável y_{-1}

$y'(x_0) \simeq \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$ expressar y_{-1} em termos de y_0, y_1.

(1) $y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} = 3$

$$\Rightarrow y_0\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 3 - \frac{y_1}{h}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{3 - \frac{y_1}{h}}{1 - \frac{1}{h}} = \frac{\frac{3h - y_1}{h}}{\frac{h-1}{h}} = \underline{\underline{\frac{3h - y_1}{h-1}}}$$

continuamos com 19 incognitas $y_1, \ldots, y_{19}$ e 19 equações.

(2) $\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + y_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{y_{-1}}{2h} = \frac{y_1}{2h} + y_0 - 3$$

$$\Rightarrow y_{-1} = y_1 + 2h(y_0 - 3)$$

estamos com 20 incognitas $y_0, y_1, \ldots, y_{19}$ e com 20 eq's

considerando $y''(x_k) = \frac{1}{8}(32 + 2x_k^3 - y(x_k)y'(x_k))$

$$y''(x_k) = \frac{1}{8}(32 + 2(x_k)^3 - y(x_k)y'(x_k))$$

para $k = 0, 1, \ldots, 19$