ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

$3^{\underline{a}}$ Prova de MA141 — 23/06/2015

NOME:____ **Turma: R RA:**________________________

1. (4 pts) Seja $\mathcal{C}$ o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano cujas coordenadas x e y satisfazem

$$x^2 - 2xy + y^2 + 10x - 6y + 25 = 0.$$

   (a) Transforme a equação da cônica $\mathcal{C}$ para escreve-la na forma canônica e encontre as mudanças consecutivas das coordenadas que levam $\mathcal{C}$ à forma canônica.

   (b) Determine as coordenadas dos focos e dos vértices, e as equações das assíntotas no sistema rodado e transladado $(\hat{x}, \hat{y})$. Encontre também a a excentricidade de $\mathcal{C}$.

   (c) Faça um esboço do gráfico de $\mathcal{C}$.

   (d) Determine as coordenadas dos focos e dos vértices no sistema cartesiano usual.

2. (1 pt) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. (Respostas sem justificativa não serão consideradas.)

   (a) Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as coordenadas de $V \in \mathbb{R}^2$ no sistema de coordenadas que resultou do sistema cartesiano convencional através de uma rotação pelo ângulo θ então

$$V = R\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \text{onde } R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (b) Considere o sistema de coordenadas polares no plano com o eixo polar sendo o eixo x e a origem sendo o polo. As coordenadas polares de $(-x,-x)^T$, onde $x > 0$, podem ser representados por (r,θ), onde $r = \sqrt{2}x$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3. (2 pts) Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ a reta dada por $y = x$ e $F = (-1,3)^T$. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos equidistantes de $\mathcal{D}$ e de F. Que tiipo de cônica é representado por $\mathcal{C}$? Escreve a equação de $\mathcal{C}$ em um sistema de coordenadas $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em termos da forma canônica de uma cônica. Faça um esboço de $F, \mathcal{D}, \mathcal{C}$ e dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

4. (3 pts) Considere o elipsoide $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ dado por $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 66 = 0$. Para qualquer ponto $P = (p_1,p_2,p_3)^T$, seja $\mathcal{T}_P$ o plano tangente de $\mathcal{E}$ que passa pelo ponto P. Temos

$$\mathcal{T}_P = \{(x,y,x)^T \,|\, p_1x + 2p_2y + 3p_3z - [(p_1)^2 + 2(p_2)^2 + 3(p_3)^2] = 0\}.$$

   (a) Seja $R = (4,1,4)^T$ e $S = (4,5,0)^T$. Determine o ângulo entre $\mathcal{T}_R$ e $\mathcal{T}_S$.

   (b) Seja $\mathcal{P}$ o plano dado por $x + y + z = 30$. Determine um ponto $Q = (q_1,q_2,q_3)^T \in \mathcal{E}$ com $q_1, q_2, q_3 > 0$ tal que $\mathcal{T}_Q$ é paralelo a $\mathcal{P}$.

   (c) Neste caso, temos $dist(\mathcal{E},\mathcal{P}) = (dist(Q,\mathcal{P})$. Calcule $dist(\mathcal{E},\mathcal{P})$.

Incluir na prova, por favor, **todas** as “contas” feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.
Boa Prova!