Álgebra Linear (MA327) PROVA 1 (28/04/2016)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: Y

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS!!! **Boa sorte!**
Respostas não justificadas apropriadamente serão desconsideradas.
Coloque o seu RA na mesa e mostre o seu RA na hora de entregar a prova.

---

1. Quais das afirmações seguintes são *verdadeiras*? Quais são *falsas*? (3 pts)

   (a) Se $\mathbb{F}$ é um corpo, então $\mathbb{F}$ possui pelo menos 2 elementos.

   (b) Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial *real*, então $|\mathcal{V}| = 1$ ou $|\mathcal{V}| = \infty$. (Lembre-se que $|\mathcal{V}|$ denota o número de elementos de $\mathcal{V}$.)

   (c) Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial *real* com $|\mathcal{V}| = \infty$, então existe um número infinito de subespaços de $\mathcal{V}$.

   (d) Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são subespaços de um espaço vetorial $\mathcal{V}$, então $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

   (e) Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial *real* com $\dim(V) = n$, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $\mathcal{V}$ possui um número infinito de bases.

   (f) O conjunto $\mathcal{N} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ \nexists f'\}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

2. Considere $\mathcal{M} = \{1 + 2x - x^2 + x^3, 3 + 2x + x^2 + x^3, -5 + 2x - 7x^2 + x^3\}$ $(\subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$.

   (a) Verifique se $\mathcal{M}$ é linearmente independente. (1 pt)

   (b) Seja $\mathcal{U} = [\mathcal{M}]$ e $\mathcal{V} = [4 - x - x^3]$. Verifique se a soma de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ é direta. (1 pt)

   (c) Determine $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V})$. (0,5 pt)

   (d) Verifique se $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. (0,5 pt)

3. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, seja $t_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$t_k(x) = \begin{cases} x - k + 1 & k - 1 \leq x \leq k, \\ -x + k + 1 & k < x \leq k + 1, \\ 0 & x \notin [k - 1, k + 1]. \end{cases}$$

   (a) Desenhe os gráficos de t_{-1}, t_0 e t_1. (0,5 pt)

   (b) Verifique se o conjunto $\{t_{-1}, t_0, t_1\}$ é linearmente independente. (1 pt)

   (c) Seja $\mathcal{M} = \{t_k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Podemos afirmar que $[M]$ é um subespaço de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, onde $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial real de todas as funções contínuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? (0,5 pt)

   (d) Verifique se $\mathcal{M}$ é uma base de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. (1 pt)

   (e) Mostre que $\dim \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \infty$. (1 pt)