ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

$1^{\underline{a}}$ Prova de MA327 — 17/09/2015, **21:00–23:00 hs**

NOME:______________________________________ **Turma:**______ **RA:**____________

1. a) (0.5 pt) Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Apresente condições suficientes que garantem que $\mathcal{U}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

b) (0.5 pt) Defina os conceitos de soma e de soma direta de subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ de um espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$.

c) (2 pts) Sejam $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ e $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 = z\}$. Verifique que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

2. a) (1 pt) Defina os conceitos de um conjunto linearmente independente, de um conjunto gerador e de uma base de um espaço vetorial *arbitrário* $\mathcal{V}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$.

b) (0.5 pt) Seja $\mathcal{P}_6$ o espaço vetorial real de todos os polinômios com coeficientes reais, variável x e grau menor ou igual a 6. Qual é a dimensão de $\mathcal{P}_6$? Justifique a sua resposta!

c) (1 pt) Seja $S = \{1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x^4, 1 + x^5, 1 + x^6, x^6\}$. Verifique se S é uma base de $\mathcal{P}_6$.

d) (0.5 pt) Seja $\mathcal{W}$ o subespaço de $\mathcal{P}_6$ gerado por $\{1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x^4, 1 + x^5\}$. Qual é a dimensão de $\mathcal{W}$? Justifique a sua resposta!

3. a) (0.5 pt) Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Apresente condições suficientes que garantem que um mapeamento $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ representa um produto interno.

b) (1.5 pt) Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal do subespaço de $\mathbb{R}^4$ com base $\{V_1, V_2, V_3\} = \{(1, 1, 0, 0)^T, (1, 2, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 1)^T\}$.

4. (2.0 pt) Responda *falso* ou *verdadero* (justificando):

a) Existem subespaços $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^4$ tais que $\dim(\mathcal{U}) = 2$, $\dim(\mathcal{W}) = 2$ e $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 1$;

b) O conjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_1(x) = 1, f_2(x) = x^2, f_3(x) = e^x$ é linearmente independente no espaço vetorial das funções contínuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) O espaço vetorial de todas funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, tem dimensão finita.

d) Se $\mathcal{V}^\perp$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{V} = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z\}$ em $\mathbb{R}^4$ então

$$\dim(\mathcal{V}^\perp) = 1.$$

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas.

Boa Prova!