Álgebra Linear (MA327) Lista (18/08/2016)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

---

1. Considere os conjuntos $\mathcal{B} = \{(-1,3)^T, (-2,-1)^T\}$ e $\mathcal{D} = \{(1,2)^T, (-1,1)^T\}$.
   (a) Obviamente $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ representam bases de $\mathbb{R}^2$. Porque? (0,5 pt)
   (b) Calcule $I_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$, a matriz da mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{D}$. Interprete o resultado geomêtricamente. (0,5 pt)
   (c) Seja $\varphi = \varphi_A$ (dica: $A = A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C} = \{E_1, E_2\}$) , onde
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Calcule $A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$, a matriz de φ com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$. Interprete $\varphi_{A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}}$ geomêtricamente. (1 pt)
2. Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer. Mostre que para toda transformação linear $\phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ existe uma única matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tal que $\varphi = \varphi_A$. (1,5 pts)
3. Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ com bases $\mathcal{B} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, $\mathcal{D} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ e $\mathcal{E} = \{W_1, \ldots W_m\}$. Além disso, seja $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ um isomorfismo e $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma transformação linear.
   (a) Utilize um diagrama comutativo para estabelecer relações entre φ e $\varphi_{A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}}$, onde $A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz de φ com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, e entre φ^{-1} e $\varphi_{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}}$, onde $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ é a matriz de φ^{-1} com respeito às bases $\mathcal{D}$ e $\mathcal{B}$. (0,5 pt)
   (b) Aumente o diagrama comutativo e inclue a relação entre ψ e $\varphi_{A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}}$, onde $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ é a matriz de ψ com respeito às bases $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$. Qual é a relação entre $A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$, $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}$ e $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, onde $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz de $\psi \circ \varphi$ com respeito a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$? Exibe esta relação no diagrama. (1 pt)
4. Seja $\varphi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o mapeamento dado por $\varphi(p) = \int_0^{2x} p'(t)dt - 2p''$, onde $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais e grau no máximo 3.
   (a) Verifique que φ é uma transformação linear. (0,5 pt)
   (b) Sejam $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{D} = \{1, x, x^2+1, x^3+x^2\}$. Encontre a matriz $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de φ associada à base $\mathcal{B}$, a matriz $A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$ de φ associada à base $\mathcal{D}$, a matrix $A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$ de φ com respeito a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ e a matrix $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ de φ com respeito a $\mathcal{D}$ e $\mathcal{B}$. (1,5 pt)
   (c) Determine bases de $\mathcal{N}(\varphi)$ e de $Im(\varphi)$. (1 pt)
   (d) Determine os autovalores de φ. (1 pt)
   (e) φ é diagonalizável? Neste caso, determine uma base de autovetores para φ. (1 pt)