MS 580 - Sugestões de Exercícios - Reticulados e Capítulo 1

Data: 16/04/14

1. Mostre que toda corrente é um reticulado mas que existem correntes que não são reticulados completos.
2. Dado o fato que $[0,1]$ é um reticulado completo, mostre que $[0,1]^X$ é um reticulado completo para todo universo X.
3. Mostre que, para todo universo X, tem-se que $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{F}(X)$ são reticulados completos, isomorfos à $\{0,1\}^X$ e $[0,1]^X$, respectivamente.
4. Sejam $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ reticulados completos. Mostre que $\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2$ é um reticulado completo.
5. Mostre detalhadamente que existem universos X_1 e X_2 tal que o reticulado completo $\mathcal{F}(X_1 \times X_2)$ não é isomorfo a $\mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2)$.
6. Seja $\mathbb{I} = \{[a,b] \mid a,b \in [0,1]\}$. Considere as relações binárias $\subseteq$ e $\leq$, onde $[a,b] \leq [c,d]$ se e somente se $a \leq c$ e $b \leq d$ $\forall a,b,c,d \in [0,1]$. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras e quais são falsas?
   (a) $(\mathbb{I}, \subseteq)$ é um poset.
   (b) $(\mathbb{I}, \leq)$ é um poset.
   (c) $(\mathbb{I}, \subseteq)$ é um reticulado.
   (d) $(\mathbb{I}, \leq)$ é um reticulado.
   (e) $(\mathbb{I} \cup \emptyset, \subseteq)$ é um reticulado completo.
   (f) $(\mathbb{I}, \leq)$ é um reticulado completo.
7. Interprete as operações de união, intersecção e complementação de conjuntos fuzzy gráficamente.
8. Quais das afirmações seguintes são verdadeiras para todos universos X, todos conjuntos de índices I e para todos conjuntos fuzzy normais A_i com $i \in I$:
   (a) $\bigcap_{\imath \in I} A_i$ é normal;
   (b) $\bigcup_{\imath \in I} A_i$ é normal;
   (c) $(A_i)'$ não é normal para todos $i \in I$.
9. Exercícios 1.1, 1.2 e 1.3 do livro.
10. Seja $A = 0.4/1 + 0.7/2 + 0.2/3$ e $B = 0.3/1 + 0.3/2 + 0.8/3$. Calcule
   (a) $A' \cup B'$;

(b) $(A \cap B)'$.

Interprete os resultados e comente.

11. Mostre que, para todo universo $X \neq \emptyset$ e para todo $A \in \mathcal{F}(X) \setminus \mathcal{P}(X)$ tem-se $A \cup A' \neq X$ e $A \cap A' \neq \emptyset$.

12. Seja $X = \mathbb{R}$. Calcule os α-cortes dos seguintes conjuntos fuzzy:

    (a) um conjunto fuzzy A árbitrário com função de pertinência triangular (veja *http://www.mathworks.com/help/fuzzy/trimf.html*);

    (b) um conjunto fuzzy B árbitrário com função de pertinência trapezoidal (veja *http://www.mathworks.com/help/fuzzy/trapmf.html*);

    (c) um conjunto fuzzy B árbitrário com função de pertinência gaussiana (veja *http://www.mathworks.com/help/fuzzy/gaussmf.html*).

13. Seja $A \in \mathcal{F}(X)$ arbitrário, fixo. Mostre que $\{[A]^\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ e $\{[A]^{\alpha+} \mid \alpha \in [0,1]\}$ são correntes.

14. Mostre que $\forall \alpha \in [0,1]$ e $\forall A, B \in \mathcal{F}(X)$, onde X é um universo qualquer, tem-se $[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ e $[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$.

15. Seja $X = \mathbb{R}$. Seja $A(x) = e^{-x^2}$ e $B(x) = e^{-(x-1)^2}$. O que representa o conjunto fuzzy $C = (A \cap B)'$? Faça um desenho de C; Calcule $[C]^\alpha$ para $\alpha \in (0,1]$.

16. Mostre que $\forall A \in \mathcal{F}(X)$, onde X é um universo qualquer, tem-se

$$A = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha [A]^\alpha.$$

Aqui, $(\alpha[A]^\alpha)(x) = \alpha([A]^\alpha(x))\ \forall x \in X$.