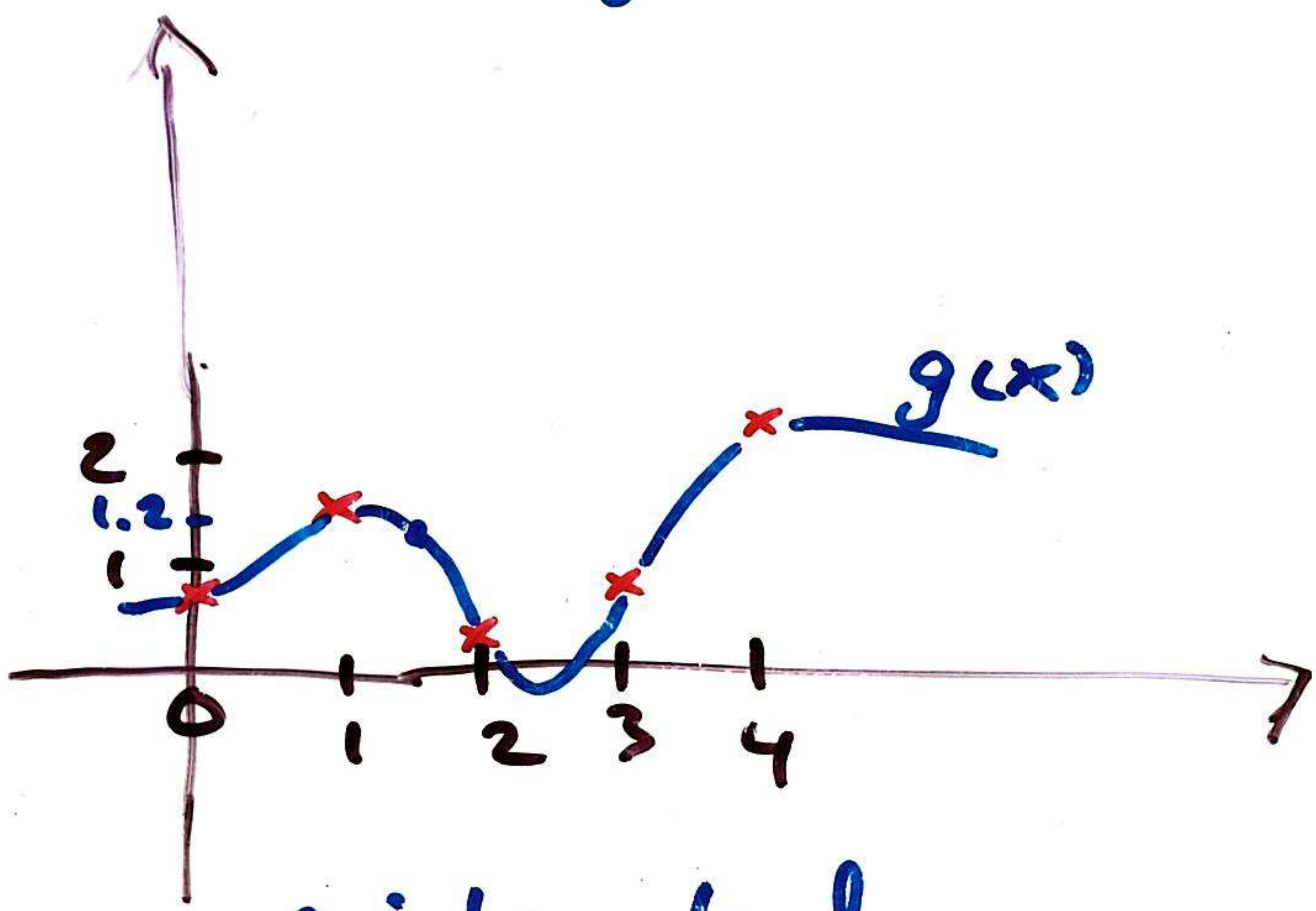
Interpolação

Exemplo:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.7	1.5	0.3	0.8	2.1

$$f(1.3) = ?$$

$$\approx g(1.3) = 1.2$$



g interpola f

Algumas aplicações da interpolação

- encher espaços vazios em tabelas de dados, por exemplo tabelas de população
- funções valores de cujo avaliação é muita complicada podem ser calculados usando interpolação de uma tabela.
- delineação: muitas vezes mais facil de avaliar a função só em algumos pontos e encher o resto usando interpolação
- integração numérica
- resolução de equações não-lineares por exemplo método da secante

- resolução de equações diferenciais e integrais
- sistemas CAD

Def.: (Interpolação)

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos, i.e. $x_i \in \mathbb{R}$ e $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Sejam $f(x_0), f(x_1) \ldots, f(x_n)$ os valores de uma função f nesses pontos

A <u>interpolação de $f(x)$</u> consiste em se obter uma função $g(x)$ tal que

$$g(x_0) = f(x_0)$$
$$g(x_1) = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$g(x_n) = f(x_n)$$

A interpolação de $f(x)$ é chamada <u>interpolação polinomial</u> se g é um polinómio

Interpolação polinomial

Dados os pontos

$$\left.\begin{array}{l}(x_0, f(x_0))\\(x_1, f(x_1))\\\vdots\\(x_n, f(x_n)),\end{array}\right\} \text{nós da interpolação}$$

(onde $x_i \neq x_j \;\forall i \neq j$)

queremos interpolar a função f por um polinômio p

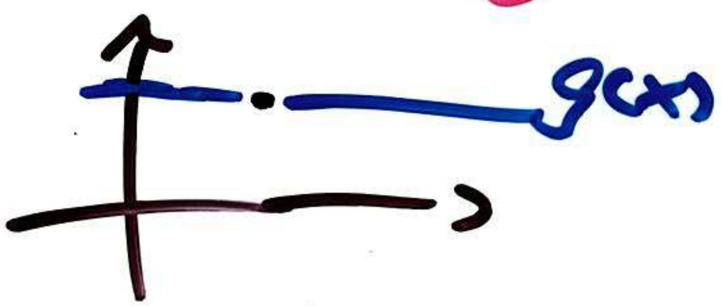
i.e.

$$p(x_0) = f(x_0)$$
$$p(x_1) = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$p(x_n) = f(x_n)$$

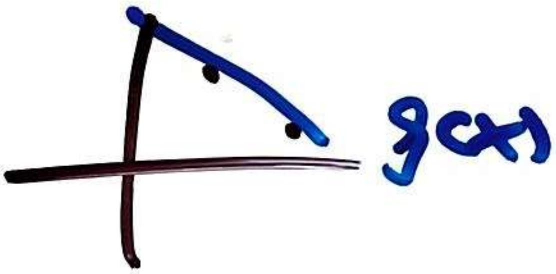
Qual é o ~~grau de um~~ numero mínimo j tal que,
dados $n+1$ nós da interpolação,
qualquer f pode ser interpolado por
um polinômio p_j de grau $\leq j$?

$n=0$:

grau 0.

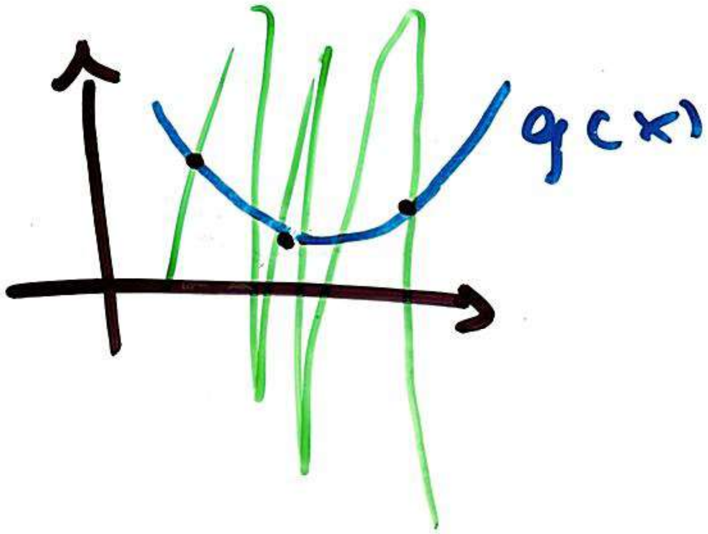


$n=1$: 1



$n=2$:

2

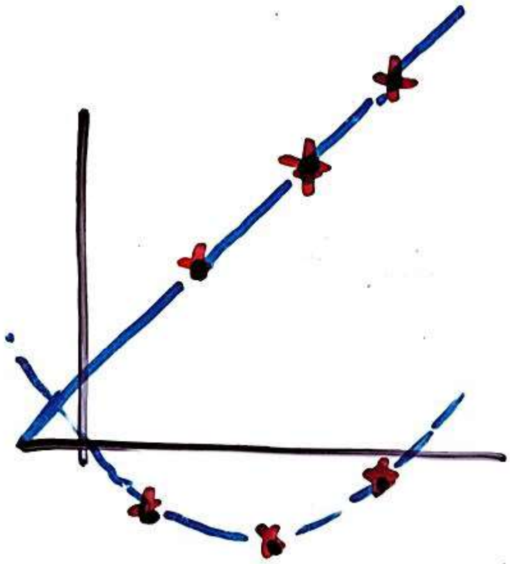


Teorema:

Dado $n+1$ nós de interpolação (x_i, y_i), $i=0,1,\dots,n$, $\&$ $y_i = f(x_i)$ com $x_j \neq x_k$ $\forall j \neq k$

existe um único polinômio p_n de grau $\leq n$ que interpola f

i.e. tal que $p_n(x_i) = y_i$, $i=0,1,\dots n$



$\exists!$ pol. de grau ≤ 2 que interpola os 3 pontos

Na prova do teorema vimos que podemos obter um polinômio p_n que interpola f se resolvemos o sistema linear

problemas com matrizes mal condicionadas

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

posto $= n+1$

Exemplo:

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	9

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow 1 + a_1 + a_2 = 3 \Rightarrow$ $2x^2 + 1$ interpola

Condicionamento de Algoritmos

Problema bem-posto

∃ solução única

pequenas perturbações nos dados de entrada provocam pequenas perturbações nos resultados

estabilidade do problema com relação aos dados

contrário: problema instável ou mau condicionado

Método estavel:

pequenas perturbações nos dados (por ex. erros de arredondamento) conduzem a soluções próximas

contrário: método instável ou mau-condicionado

Forma de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

e $y_i = f(x_i)$

O polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pode ser escrito na forma

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde

$L_k(x)$ é poli de grau n $\forall k$

com $L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k \end{cases}$

$$L_k(x) = c_k \cdot (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \cdot (x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)$$

$$1 = L_k(x_k) =$$

$$= c_k \cdot (x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1}) \cdot (x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)}$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i\neq k}(x-x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)}$$

Exemplo:

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	9

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{x(x-2)}{1\cdot(-1)} = -x(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$P_2(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$

$= L_0(x) + 3L_1(x) + 9L_2(x)$

$= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - 3x(x-2)$

$+ 9\frac{1}{2}x(x-1)$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$

$- 3x^2 + 6x$

$+ \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x$

$= \frac{1}{2}x^2 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^2 \quad 2x^2$

$- \frac{3}{2}x + 6x - \frac{9}{2}x = +0x$

$+1 \quad +1$

Desvantagens da Forma de Lagrange

(1) Avaliação de $p_n(x)$ em um x exige $O(n^2)$ adições e multiplicações;

(2) Adição de (x_{n+1}, y_{n+1}) exige novos cálculos; não podemos aproveitar de $p_n(x)$ para determinar $p_{n+1}(x)$;

(3) O cálculo da forma de Lagrange é numéricamente instável.

Forma de Newton

Podemos interpolar $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ utilizando um poli. $p_n(x)$ de grau $\leq n$ onde

$$p_n(x) = f_0 + f_1 (x-x_0) + f_2 (x-x_0)(x-x_1) + \ldots\ldots + f_n (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

f_i são dadas pelo <u>operador de diferenças divididas</u>

Definição

(Operador diferenças divididas)

Seja $f(x)$ uma função com $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{f[x_0]}_{f_0} = f(x_0), \; f[x_1] = f(x_1), \ldots$$

(diferenças divididas de) Ordem 0

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f_1,$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \ldots$$

(diferenças div. de) Ordem 1

$$\underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{f_2} = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

(diferenças divididas de) Ordem 2

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] \quad f_3$$

$$= \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3}$$

Ordem 3

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = f_n$$

$$= \frac{f[x_0, x_1, \dots x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

Ordem n

Exemplo:

x	0 (x_0)	1 (x_1)	2 (x_2)
$f(x)$	1	3	9

Ordem

X	0	1	2
0	1 f_0		
		$\frac{1-3}{0-1}=2$ f_1	
1	3		$\frac{2-6}{0-2}=2$ f_2
		$\frac{3-9}{1-2}=6$	
2	9		

$$p_2(x) = 1 + 2\cdot(x) + 2\cdot(x)(x-1)$$

$$= 1 + 2x + 2(x^2 - x)$$

$$= 1 + 2x^2$$

Tabela das Diferenças Divididas

Ordem

x	0	1	2	. . . . .	n
x_0	$\overset{f_0}{f[x_0]}$	$\overset{f_1}{f[x_0,x_1]}$	$\overset{f_2}{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\dots$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		$\dots$	$\overset{f_n}{f[x_0,x_1,\dots x_n]}$
x_3	$f[x_3]$			$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$				
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1},x_n]$			

$$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Teorema 1

Seja f $n+1$ vezes continuamente derivavel em $[a,b]$.

Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Então

$$\begin{array}{rl}
 & f(x) = f[x_0] + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] \\
p_n(x) & \quad + (x-x_0)(x-x_1)\, f[x_0,x_1,x_2] \\
 & \qquad \vdots \\
 & \quad + (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})\, f[x_0,\dots,x_n] \\
E_n(x) & \quad + \boxed{(x-x_0) \dots (x-x_n)\, f[x_0,\dots,x_n,x]}
\end{array}$$

$p_n(x)$ é o polinómio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Corolário 1: Sob as hipoteses do teorema temos:

Seja $x \in (x_0, x_n)$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

para algum $\xi_x \in (x_0, x_n)$

Cor. 2: Sob as mesmas hipóteses:

Seja $f^{(n+1)}(x)$ contínua em $[x_0, x_n]$

$$|E_n(x)| \leq |x - x_0||x - x_1| \dots |x - x_n| \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\forall x \in [x_0, x_n]$$

onde $M_{n+1} = \max\limits_{\xi \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(\xi)|$

$(x_0 \leq x_i \leq x_n$ para $i = 0, 1, \dots, n)$

Cor. 3: Sob as mesmas hipós:

Seja $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$

$$|E_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)} \quad \forall x \in [x_0, x_n]$$

$(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$