1. (a) $t=3$, $\beta=10$, $e \in [-9, 9]$

sem pivoteamento:

$$R = \left(\begin{array}{c|cc} 0{,}100\cdot 10^{-4} & 0{,}200\cdot 10^{0} \\ \hline 0{,}100\cdot 10^{5} & 0{,}300\cdot 10^{0} \\ & -0{,}200\cdot 10^{4} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{0{,}300\cdot 10^{0}}_{x=\bar{x}} - \underbrace{0{,}200\cdot 10^{4}}_{y=\bar{y}} = 0{,}00003\cdot 10^{4} - 0{,}200\cdot 10^{4} = -0{,}19997\cdot 10^{4} = \bar{x}-\bar{y}$$

resultado da maquina: $\overline{\bar{x}-\bar{y}} = -0{,}200\cdot 10^{4}$

Daí, a maquina produz:

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}100\cdot 10^{1} & 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} \\ 0{,}100\cdot 10^{5} & 0{,}100\cdot 10^{1} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0{,}100\cdot 10^{-4} & 0{,}200\cdot 1 \\ 0{,}000\cdot 10^{-9} & -0{,}200\cdot \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L(\underbrace{Ux}_{y}) = b$$

1. $Ly = b$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}100\cdot 10^{1} & 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} & 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} \\ 0{,}100\cdot 10^{5} & 0{,}100\cdot 10^{1} & 0{,}100\cdot 10^{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} y_1 = 0{,}000\cdot 10 \\ y_2 = 0{,}100\cdot 1 \end{array}$$

2. $Ux = y$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}100\cdot 10^{-4} & 0{,}200\cdot 10^{0} & 0{,}000\cdot 10^{-9} \\ 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} & -0{,}200\cdot 10^{4} & 0{,}100\cdot 10^{5} \end{array}\right) \quad x_2 = \frac{0{,}100\cdot 10^{5}}{-0{,}200\cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{0{,}200\cdot 10^{0}\cdot 0{,}500\cdot 10^{1}}{0{,}100\cdot 10^{-4}} = 0{,}500\cdot 10^{1}$$

$$= \frac{0{,}100\cdot 10^{1}}{0{,}100\cdot 10^{-4}} = 1{,}000\cdot 10^{5} = 0{,}100\cdot 10^{6}$$

Resultado obtido: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0{,}100\cdot 10^{6} \\ -0{,}500\cdot 10^{1} \end{pmatrix}$

Compivoteamento:

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}100\cdot 10^{0} & 0{,}300\cdot 10^{0} \\ 0{,}100\cdot 10^{-3} & 0{,}200\cdot 10^{0} - 0{,}300\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 0{,}200\cdot 10^{0} = \bar{x}, \quad y = 0{,}300\cdot 10^{-4} = \bar{y}$$

$$x - y = \bar{x} - \bar{y} = 0{,}200\cdot 10^{0} - 0{,}00003\cdot 10^{0}$$
$$= 0{,}19997\cdot 10^{0} \longrightarrow \overline{\bar{x} - \bar{y}} = 0{,}200\cdot 10^{0}$$

1. $Ly = Pb$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}100\cdot 10^{1} & 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} & 0{,}100\cdot 10^{5} \\ 0{,}100\cdot 10^{-3} & 0{,}100\cdot 10^{1} & 0{,}000\cdot 10^{-9} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{L} \qquad \underbrace{\qquad}_{Pb}$$

$$y_1 = \frac{0{,}100\cdot 10^{5}}{0{,}100\cdot 10^{1}} = 1{,}000\cdot 10^{4} = \underline{\underline{0{,}100}}\cdot 10^{5}$$

$$y_2 = -\cancel{0{,}1}00\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}100\cdot 10^{5} = -0{,}010\cdot 10^{2} = \underline{\underline{-0{,}100\cdot 1}}$$

2. $Ux = y$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}100\cdot 10^{0} & 0{,}300\cdot 10^{0} & 0{,}100\cdot 10^{5} \\ 0 = 0{,}000\cdot 10^{-9} & 0{,}200\cdot 10^{0} & -0{,}100\cdot 10^{1} \end{array}\right)$$

$$x_2 = -\frac{0{,}100\cdot 10^{1}}{0{,}200\cdot 10^{0}} = -0{,}500\cdot 10^{1}$$

$$x_1 = \frac{0{,}100\cdot 10^{5} + 0{,}300\cdot 10^{0}\cdot 0{,}500\cdot 10^{1}}{0{,}100\cdot 10^{0}}$$

$$= \frac{0{,}100\cdot 10^{5} + 0{,}150\cdot 10^{1}}{0{,}100\cdot 10^{0}}$$

$$= \frac{0{,}100\cdot 10^{5} + 0{,}000015\cdot 10^{5}}{0{,}100\cdot 10^{0}} \overset{\text{na mol.}}{=} \frac{0{,}100015\cdot 10^{5}}{0{,}100\cdot 10^{0}}$$

$$\xrightarrow[\text{magnina}]{\text{na}} (0{,}100\cdot 10^{5})/(0{,}100\cdot 10^{0}) = 0{,}\underline{100}\cdot 10^{6}.$$

$$\boxed{\check{x} = \begin{pmatrix} 0{,}100\cdot 1 \\ -0{,}500\cdot \end{pmatrix}}$$

(b) $\hat{x} = \check{x} = \begin{pmatrix} 10^5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$A\hat{x} = A\check{x} = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 10^4 - 1,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 - 1,5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} = b$$

Podemos avaliar a qualidade da resposta obtida $\hat{x} = \check{x}$ em termos do resíduo

$$\| A\hat{x} - b \|_\infty = \| A\check{x} - b \|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 - 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10^4 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 1,5$$

(c) A fatoração LU é geralmente usada no método de Newton modificado:
Na k-ésima iteração para $k = 0, 1, \ldots$ se resolve

$$J(x^{(0)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

Então precisa-se resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes $J(x^{(0)})$
A decomposição LU de $J(x^{(0)})$ custa $O(n^3)$ operações
Dado L e U somente precisa-se resolver sistemas triangulares, cada um a um custo computacional de $O(n^2)$.
Se utilizar Eliminação Gaussiana, seria necessário um custo computacional de $O(n^3)$ em cada iteração.

2. (a) Seja $e^{(k)} = x^{(k)} - L$

onde $L = \lim_{k \to \infty} x^{(k)} \in \mathbb{R}^4$

A ordem de convergência de $x^{(k)}$

é linear se

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\| e^{(k+1)} \|_\infty}{\| e^{(k)} \|_\infty} = C$$

para algum C tal que $0 < C < 1$

(Observe que temos $\| e^{(k+1)} \|_\infty \approx C \cdot \| e^{(k)} \|_\infty$ para k grande)

(b) $x^* = \begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,8 \end{pmatrix}$ satisfaz $A x^* = b$

A tabela mostra $x^{(k)}$ com 4 dígitos decimais

$\| e^{(6)} \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1,1001 \\ -0,8000 \end{pmatrix} - x^* \right\| = 10^{-4}$, $\| e^{(5)} \|_\infty = 4 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow \| e^{(6)} \|_\infty = \frac{1}{4} \cdot \| e^{(5)} \|_\infty$

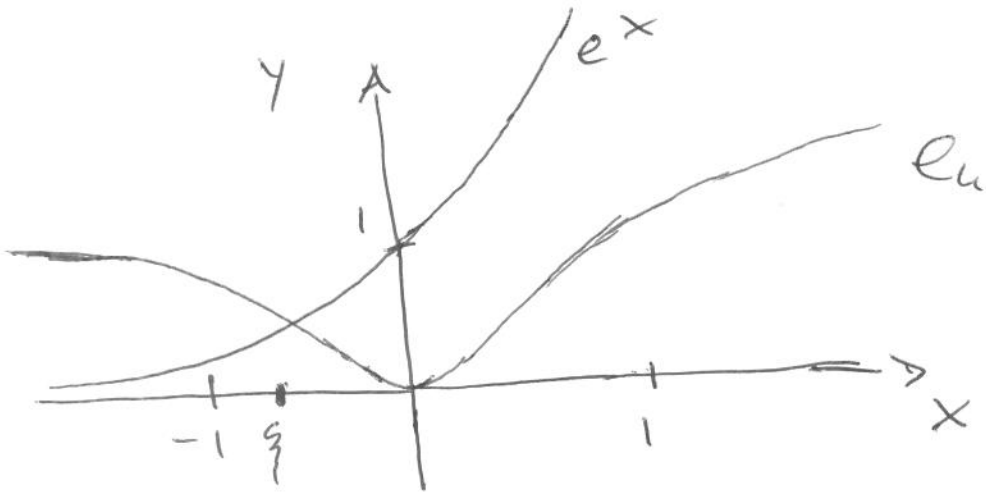
$\| e^{(4)} \|_\infty = 16 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \| e^{(5)} \|_\infty = \frac{1}{4} \cdot \| e^{(4)} \|_\infty$

$\| e^{(3)} \|_\infty = 62 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \| e^{(4)} \|_\infty \approx \frac{1}{4} \cdot \| e^{(3)} \|_\infty$

Estas observações indicam que $\lim_{k \to \infty} \frac{\| e^{(k+1)} \|_\infty}{\| e^{(k)} \|_\infty} = C$

onde $C = \frac{1}{4}$, então elas indicam a ordem de convergência linear de $(x^{(k)}$

3.



(a) ∃! raiz

(b) $f(x) = e^x - \ln(x^2+1)$

$f'(x) = e^x - \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	-1	-0,3253 (0,3253 ≠ ε)	
1	-0,7622	0,0086	

$\uparrow$

$|f(x_1)| = |0,00861| < 10^{-2} = \varepsilon$ PARE

$\therefore \xi \approx x_1 = -0,7622.$

4(a) $f(c,p) = (2000 + 4c^{\frac{1}{2}} - 20p)(p-2) - 20000 - c$

(b) $\frac{\partial f}{\partial c}(c,p) = 2c^{-\frac{1}{2}}(p-2) - 1 =: f_1(c,p)$

$\frac{\partial f}{\partial p}(c,p) = -20(p-2) + 2000 + 4c^{\frac{1}{2}} - 20p$

$= 2040 + 4c^{\frac{1}{2}} - 40p =: f_2(c,p)$

$$F(c,p) = \begin{pmatrix} f_1(c,p) \\ f_2(c,p) \end{pmatrix}$$

$$J(c,p) = \begin{pmatrix} -c^{-\frac{3}{2}}(p-2) & 2c^{-\frac{1}{2}} \\ 2c^{-\frac{1}{2}} & -40 \end{pmatrix}$$

contas com 4 dígitos decimais:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 65 \end{pmatrix}, \quad F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,0288 \\ -70,1021 \end{pmatrix}$$

Note que $\|F(x^{(0)})\|_\infty = 70,1021 \neq 0$

$$J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0,0163 & -0,0288 \\ 0,0163 & -40 & 70,1021 \end{array}\right) \quad s_2^{(0)} = -\frac{0,0288}{0,0163} = -1,7660$$

$$s_1^{(0)} = \frac{70,1021 - 40,0 \cdot 1,7669}{0,0163} = -32,9867$$

$$s^{(0)} = \begin{pmatrix} -32,9867 \\ -1,7660 \end{pmatrix}$$

Continuação 4(b)

$\varepsilon = 10^{-2}$

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|F(x^{(k)})\|_\infty$	$\|s^{(k-1)}\|_\infty$	$s^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 15000 \\ 65 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0288 \\ -70,1021 \end{pmatrix}$	70,1021	-	$\begin{pmatrix} -32,986 \\ -1,766 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 14967,0133 \\ 63,2340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0010 \\ -0,0010 \end{pmatrix}$	$0,001 < \varepsilon$ PARE!		

$\therefore x^* \approx x^{(1)}$

Então o lucro maximal que a DOLDYS pode realizar é dado por $f(x^{(2)})$

$\approx 40025,00$, que dizer \$40025