MS211 - Turma D - Prova 1 - 28/04/2026

Nome: ou Thacós RA: Número de Faltas:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

não

1. (a) Qual é o método numérico de resolução de sistemas lineares no qual o método de fatoração LU (com pivoteamento) é geralmente utilizado? Qual é o benefício de utilizar o método de fatoração LU na aplicação desse método de resolução de sistemas lineares? [0.5 pt]

   (b) Considere o sistema linear seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 0.92 & 4.8 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determine a fatoração LU COM pivoteamento de A usando o vetor p e as matrizes $R^{(i)}$ e $R^{(i)'}$ como ensinado na aula. Quais são as matrizes L, U e P resultantes? [1.5 pts]

   (c) Considere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b}$ qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$. Como se usa L, U e P para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Qual é o primeiro e qual é o segundo sistema linear a ser resolvido? [0.5 pt]

(b) $A, p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 3 & 0.92 & 4.8 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0.6 & 2.72 & 4.8 \\ 0.2 & -3.4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)'} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0.2 & -3.4 & -1 \\ 0.6 & 2.72 & 4.8 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0.2 & -3.4 & -1 \\ 0.6 & -0.8 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & -0.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0 & -3.4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.(a) O método numérico no qual a fatoração LU (com pivoteamento parcial) é geralmente usado é o método de Newton Modificado. Nesse método de resolução de sistemas lineares é necessário resolver $J(x^{(0)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$ em cada passo. Portanto, se resolve um sistema linear com a mesma matriz de coeficientes, a saber $J(x^{(0)})$, (geralmente) várias vezes até um critério de parada é atingido.

Dado a fatoração LU de $J(x^{(0)})$ que custa $O(n^3)$ operações, o custo computacional para resolver $J(x^{(0)}) \cdot s^{(k)} = -F(x^{(k)})$ é $O(n^2)$ para todo $k = 0, 1, \ldots$. Em comparação, o custo computacional usando o método padrão, i.e. Eliminação Gaussiana, é $O(n^3)$ para todo $k = 0, 1, \ldots$

1.(c) $LU = PA$. Portanto, ~~Lu~~ $Ax = b \iff PAx = Pb$
$\iff L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

1. Resolve $Ly = Pb \rightsquigarrow y^*$ solução
2. Resolve $Ux = y^* \rightsquigarrow x^*$

Sendo assim $LUx^* = L(Ux^*) = Ly^* = Pb \iff Ax^* = b$

2. Utilize frações para resolver essa questão. Considere o sistema linear seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Gere a matriz C e o vetor $\mathbf{g}$ utilizados no método de (Gauss-)Jacobi. [0.25 pt]

(b) Seja $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ (note que $||A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}||_\infty = 1$). Aplique uma iteração do método de (Gauss-)Jacobi usando C e $\mathbf{g}$ do item (a) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ e calcule $||A\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}||_\infty$. [0.5 pts]

(c) Utilize a matriz C do item (a) para verificar se o critério de Sassenfeld é satisfeito. O que você pode afirmar referente às consequências do seu resultado para os métodos seguintes?

i. O método de (Gauss-)Jacobi;

ii. O método de Gauss-Seidel.

[0.75 pt]

(d) Utilize a matriz C e o vetor $\mathbf{g}$ do item (a) para gerar $\mathbf{x}^{(1)}$ através do método de Gauss-Seidel com chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Exibe os vetores intermediários. Em seguida, calcule $||A\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{b}||_\infty$. [1 pt]

(a) $$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(b) $$x^{(1)} = C \cdot x^{(0)} + g$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$||Ax^{(1)} - b||_\infty = \left|\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = \left|\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = 0.$$

2.(c)

$$|C| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} & \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} < 1 \checkmark$$

$$\gamma_2 = \frac{2}{9} < 1 \checkmark$$

$$\gamma_3 = \frac{4}{15}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9} < 1 \checkmark$$

$\therefore$ O critério de Sassenfeld é satisfeito.

Portanto, sabemos que o método de Gauss-Seidel produz uma sequência convergente para a solução de $Ax=b$ a partir de qualquer chute inicial $x^{(0)}$. A satisfação do critério de Sassenfeld não implica que a sequência gerada pelo método de Jacobi irá convergir a partir de um chute inicial.

(d)

$$\left(0 \;\; -\frac{1}{3} \;\; 0\right)\cdot x^{(0)} + \frac{4}{3} = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{2}{3} \;\; 0 \;\; 0\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3} = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{4}{5} \;\; -\frac{4}{5} \;\; 0\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$\|Ax^{(1)} - b\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_\infty = 0$$

3. Considere a seguinte equação não-linear:

$$e^x = x^2. \tag{1}$$

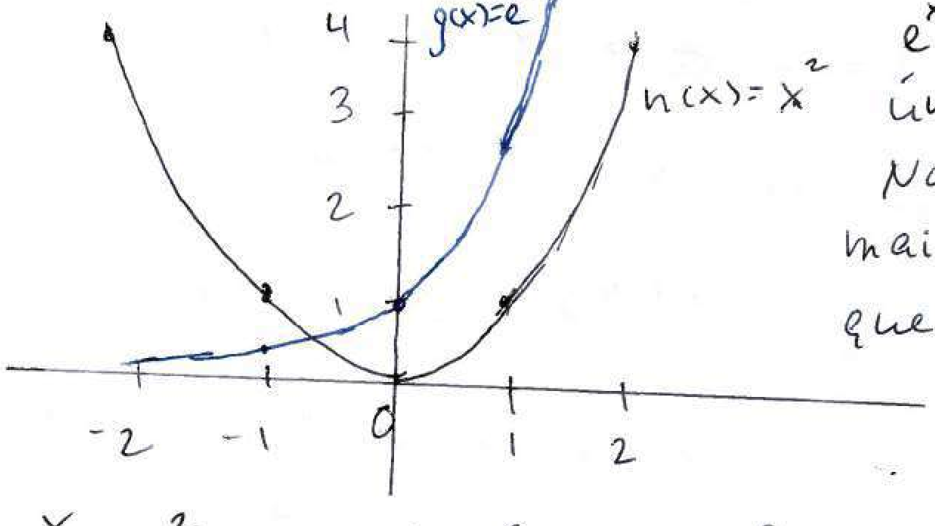
(a) Quantas soluções tem a Equação (1)? Justifique a sua resposta através de um gráfico. [0.25 pts]

(b) Use uma função f para reescrever a Equação (1) em uma forma que permite a aplicação do método de Newton-Raphson. Considerando o chute inicial $x_0 = 0$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. [1.75 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	0	1	–
1	−1	−0.6321	1
2	−0.7330	−0.0569	← PARE

(c) Sob algumas condições, a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo método de Newton-Raphson converge para um ponto fixo de uma certa função φ. O que é um ponto fixo de uma função real φ? Qual é a função φ no caso do método de Newton-Raphson? Justifique a sua resposta. [0.5 pt]

(a)



$e^x = x^2$ tem uma única solução. Note que e^x cresce mais rapido do que x^2 para $x > 0$

(b) $e^x = x^2 \iff e^x - x^2 = 0 \iff f(x) = 0$, sendo $f(x) = e^x - x^2$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Aqui $f'(x) = e^x - 2x$

$x_1 = 0 - \dfrac{e^0}{e^0} = 0 - 1 = -1$, $x_2 = -1 - \dfrac{-0.6321}{2.3679} = -0.7330$

$|f(x_2)| = 0.0569 < \varepsilon$. Deve-se parar com as iterações.

(c) ξ é ponto fixo de φ se e somente se $\xi = \varphi(\xi)$

Continuação 3(c)

No caso do método de Newton-Raphson

a função φ é dada por $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Supondo que $f'(x) \neq 0$, podemos

reescrever $f(x) = 0$ na forma

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Supondo que $f'(\xi) \neq 0$

$$f(\xi) = 0 \iff \xi = \varphi(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$$

executamos iterações da forma

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

supondo que $f'(x_k) \neq 0$

$\forall k = 0, 1, \ldots$

4. Deve ser construída uma embalagem de leite com capacidade para 1 litro a partir de uma folha de cartão encerado com uma sobreposição de 5 mm. O requisito é que seja utilizada a menor área de superfície possível, a ser determinada em mm^3, para a embalagem. Sejam w, b e h a largura, a profundidade e a altura, respectivamente, da embalagem. (Veja as figuras na próxima folha.) A área total da superfície, A, é dada por

$$A = (2b + 2w + 5)(h + b + 10).$$

Uma vez que um litro equivale a 10^6 mm^3, segue que $hbw = 10^6$ e portanto $w = \frac{10^6}{hb}$. Se considerarmos $\mathbf{x} = (b, h)^T$ como o vetor de duas incógnitas, b e h, a área da superfície pode então ser expressa como

$$A(\mathbf{x}) = (h + b + 10)\Big(\frac{2 \cdot 10^6}{hb} + 2b + 5\Big).$$

A minimização desta função implica igualar as suas derivadas parciais a zero, o que dá

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial b}A(b,h) = 4b + 2h + 25 - \frac{2 \cdot 10^6}{b^2}\Big(1 + \frac{10}{h}\Big) = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial h}A(b,h) = 2b + 5 - \frac{2 \cdot 10^6}{h^2}\Big(1 + \frac{10}{b}\Big) = 0. \end{cases}$$

Seja $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))^T$. Suponha que você já determinou as derivadas parciais seguintes:

$$\frac{\partial}{\partial b}f_1(\mathbf{x}) = 4 + \frac{4 \cdot 10^6}{b^3}\Big(1 + \frac{10}{h}\Big), \ \frac{\partial}{\partial h}f_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial b}f_2(\mathbf{x}) = 2 + \frac{20 \cdot 10^6}{h^2 b^2}, \ \frac{\partial}{\partial h}f_2(\mathbf{x}) = 4 + \frac{4 \cdot 10^6}{b^3}\Big(1 + \frac{10}{h}\Big).$$

(a) Execute um passo do método de Newton com a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (b_0, h_0)^T = (60, 130)^T$ e preenche os ... na tabela seguinte. Para simplificar essa tarefa, $F(\mathbf{x}^{(0)}) = (-73.2906, -13.0671)^T$ já foi calculado. Explique como você fez as contas e como foram obtidos $\mathbf{s}^{(0)}$ e $\mathbf{x}^{(1)}$. [1.5 pts]

k	$\mathbf{x}^{(k)}$	$F(\mathbf{x}^{(k)})$	$\|\|F(\mathbf{x}^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|\mathbf{s}^{(k-1)}\|\|_\infty$	$\mathbf{s}^{(k)}$
0	$\begin{pmatrix} 60 \\ 130 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} 73.2906 \\ 13.0671 \end{pmatrix}$	73.2906	–	$\begin{pmatrix} 2.7567 \\ 3.1296 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 62.7567 \\ 133.1296 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3.6798 \\ -0.3126 \end{pmatrix}$	3.6798	3.1296	

(b) Sabemos que o primeiro passo do método de Newton Modificado é identico àquele do método de Newton. Considere $\mathbf{x}^{(1)}$ do item anterior. Utilize o método de Newton Modificado para gerar $\mathbf{x}^{(2)}$. Justifique a sua resposta. (Não precisa usar o método de fatoração LU para resolver o sistema linear que surge nessa questão.) [0.75 pt]

(c) Quais são as estimativas para a largura w, a profundidade b e a altura h obtidas no item (b)? [0.25 pt]

(a)
$$J(x) = \begin{pmatrix} 4 + \frac{10^6 \cdot 4}{b^3}\left(1 + \frac{10}{h}\right) & 2 + \frac{20 \cdot 10^6}{h^2 b^2} \\ 2 + \frac{20 \cdot 10^6}{h^2 b^2} & \frac{4 \cdot 10^6}{h^3} \cdot \left(1 + \frac{10}{b}\right) \end{pmatrix}$$

No primeiro lugar, vamos resolver

$$J(x^{(0)}) \cdot s^{(0)} = -F(x^{(0)})$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 23.943 & 2.3287 & 73.2906 \\ 2.3287 & 2.1241 & 13.0671 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 23.943 & 2.3287 & 73.2906 \\ 0 & 1.8974 & 5.9387 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_2^{(0)} = 3.1296$$

$$S_1^{(0)} = \frac{73.2906 - 2.3287 \cdot 3.1296}{23.943} = 2.7567$$

$$\Rightarrow \quad S^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.7567 \\ 3.1296 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \; x^{(1)} = x^{(0)} + S^{(0)} = \begin{pmatrix} 62.7567 \\ 3.1296 \end{pmatrix}$$

(b) Para encontrar $x^{(2)}$ usando o método de Newton modificado, resolvemos $J(x^{(0)}) \cdot s^{(1)} = -F(x^{(1)})$ e, em seguida, fazemos $x^{(2)} = x^{(1)} + s^{(1)}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 23.943 & 2.3287 & 3.6798 \\ 2.3287 & 2.1241 & 0.3126 \end{array}\right).$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 23.943 & 2.3287 & 3.6798 \\ 0 & 1.8974 & -0.0453 \end{array}\right)$$

Cont. 4(b)

$$s_2^{(1)} = -\frac{0.0453}{1.8974} = -0.0239$$

$$s_1^{(1)} = \frac{3.6798 + 2.3287 \cdot 0.0239}{23.943} = 0.156$$

$$\therefore s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.156 \\ -0.0239 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s^{(1)} = \begin{pmatrix} 62.7567 \\ 133.1296 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.156 \\ -0.0239 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 62.9127 \\ 133.1057 \end{pmatrix}$$

(c) A profundidade estimada é

$$b_2 = 62.9127 \text{ mm}$$

A estimativa para a ~~largura~~ altura é

$$h_2 = 133.1057 \text{ mm}$$

e a estimativa para a largura é

$$w_2 = \frac{10^6}{h_2 b_2} = 119.4167 \text{ mm}$$