MS211 - Cálculo Numérico

Métodos de Runge-Kutta para Resolução de PVIs (Slides Modificados de M. E. Valle)

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos de série de Taylor para um problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

De um modo geral, um método numérico determina uma aproximação y_k para $y(x_k)$, em que $x_k = x_0 + kh$, para $k = 1, 2, \ldots$.

Um método numérico é dito de ordem p se o erro local satisfaz

$$|e(x_k)| = |y(x_{k+1}) - y_{k+1}| < Ch^{p+1},$$

em que $C > 0$ é uma constante que pode depender das derivadas da solução y do PVI.

Método de Série de Taylor de Ordem 1 e 2

O método de Euler que é um método de série de Taylor de ordem 1, define:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Similarmente, um método de série de Taylor de ordem 2 define:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h + \frac{df(x,y)}{dx}(x_k)\frac{h^2}{2}.$$

Aqui, y_k é uma aproximação para $y(x_k)$, com $x_k = x_0 + kh$.

Obtemos erro local menores considerando métodos de série de Taylor de ordem maior. Contudo, temos que calcular derivadas!

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja, y_{k+1} é determinado usando apenas de x_k e y_k.

Um método de Runge-Kutta de ordem p não requer o cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função ϕ que é definida avaliando f em diferentes pontos.

A sua fórmula coincide com aquela do método Taylor de ordem p até os termos de p-ésima ordem em h.

Especificamente, os métodos de Runge-Kutta são dados por:

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k), \forall k = 0, 1, \ldots,$$

em que ϕ é uma função de x e y que depende indiretamente de f e do tamanho do passo h.

Método de Heun ou Euler Aperfeiçoado

O método de Euler, obtido considerando $\phi = f$, é um método de Runge-Kutta de ordem $p = 1$.

O **método de Heun**, também conhecido por **método de Euler modificado** ou **método de Euler aperfeiçoado**, é um método de Runge-Kutta de ordem 2.

No método de Heun, definimos

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

em que $k_1 = f(x_k, y_k)$ e $k_2 = f(x_{k+1}, y_k + hk_1)$.

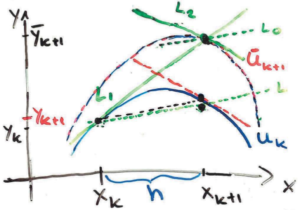
Observe que esse é um método de Runge-Kutta com

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x, y) + f\left(x + h, y + hf(x, y)\right)\right).$$

Ideia do Método de Heun

Mét's de R-K de Ordem 2

Mét. de Euler Aperfeiçoado



Seja $\bar{Y}_{k+1} = Y_k + Y_k' \cdot h$ (result. do mét. de Eul.)

a inclinação de L_1 é $Y_k' = f(x_k, Y_k)$

a " de L_2 é $f(\underbrace{x_k + h}_{x_{k+1}}, \bar{Y}_{k+1})$ $\quad \bar{u}_{k+1}'(x_{k+1})$

$u_k'(x_{k+1}) \approx \bar{Y}_{k+1}' = \bar{u}_{k+1}'(x_k$

Ideia do Método de Heun

Seja L_0 a reta que passa por $(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ que tem inclinação

$$\boxed{\frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}}$$

L passa por (x_k, y_k) e é paralela à L_0

$$\Rightarrow L(x) = y_k + \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} \cdot (x - x_k)$$

Dado $x_0, x_1, \ldots$ e y_k, o mét. de Euler Aperfeiçoado escolha

$$y_{k+1} = L(x_{k+1}) = y_k + \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} \cdot h$$

Temos um mét. de R-K de ordem 2 porque a formula acima coincide com a formula do mét. de Taylor (de ordem 2) até os termos de ordem 2 em h.

Interpretação Gráfica do Método de Heun

Interpretação Gráfica do Método de Euler Aperfeiçoado

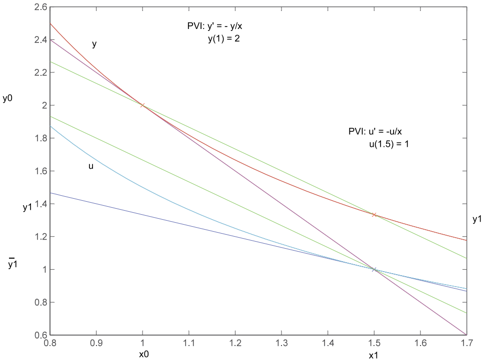


Tabela e Comentários sobre o Slide Anterior

$$\begin{cases} y' & = & -\frac{y}{x}, x \neq 0 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

Considere o método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.5$.

x_k	y_k	$y'_k = -\frac{y_k}{x_k}$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = -\frac{\bar{y}_{k+1}}{x_{k+1}}$	$\Delta y_k = \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} h$
1	2	-2	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
1.5	$\frac{4}{3}$				

Aqui sabemos que $y(x) = 2x^{-1}$ é solução do PVI acima. Além disso, sabemos que a solução geral da equação diferencial $y' = -\frac{y}{x}$ é cx^{-1}. Portanto, a solução do PVI $u' = -\frac{u}{x}$, $(x \neq 0)$, $u(1.5) = 1$ é $u(x) = \frac{3}{2}x^{-1}$.

Note que $u' = -\frac{3}{2}x^{-2}$ e portanto $u'(1.5) = -\frac{2}{3}$.

Tabela do Método de Heun: Exemplo 1

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' &= y + x^2 + 1 \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

Em seguida aplicamos o método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.1$ para estimar $y(0.3)$.

x_k	y_k	$y'_k = y_k + x_k^2 + 1$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = \bar{y}_{k+1} + x_{k+1}^2 + 1$	$\Delta y_k = \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} h$
0	0.5	1.5	0.65	1.66	0.158
0.1	0.658	1.668	0.8248	1.8648	0.1766
0.2	0.8346	1.8746	1.0221	2.1121	0.1993
0.3	1.0339				

Obtemos $y(0.3) \approx y_3 = 1.0339$.

Tabela do Método de Heun: Exemplo 2

Exemplo de uma aplicação do Método de Euler Aperfeiçoado

1. Considere o PVI seguinte:

$$\begin{cases} y' = 2\frac{y}{x},\ x \neq 0, \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

   Utilise o Método de Euler Aperfeiçoado com $h = 0.1$ para calcular um valor aproximado de y(1.3) (usando 4 dígitos decimais).

x_k	y_k	$y'_k = 2\frac{y_k}{x_k}$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = 2\bar{y}_{k+1}/x_{k+1}$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$
1	-2	-4	-2.4	-4.3636	-0.4182
1.1	-2.4182	-4.3967	-2.8579	-4.7631	-0.4580
1.2	-2.8762	-4.7936	-3.3555	-5.1624	-0.4978
1.3	-3.3740				

Método de Runge-Kutta de Ordem 4

O método de Runge-Kutta de ordem 4 é dado por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

em que

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_k, y_k\right),\\
k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1\frac{h}{2}\right),\\
k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_2\frac{h}{2}\right),\\
k_4 &= f\left(x_k + h, y_k + hk_3\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 1

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar $y(0.04)$ com $h = 0.04$. Compare com a solução analítica $y(0.04) = e^{0.04}$.

Exemplo 1

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Use o método da Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar $y(0.04)$ com $h = 0.04$. Compare com a solução analítica $y(0.04) = e^{0.04}$.

Resposta: Pelo método de Heun, teremos

$$y_1 = y_0 \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right) = 1.0408.$$

Observe que essa é a solução encontrada pelo método de série de Taylor de ordem 2 na aula anterior.
O erro obtido é

$$|e^{0.04} - y_1| = 1.0774 \times 10^{-5}.$$

No método de Runge-Kutta de ordem 4 temos

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0,$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1\frac{h}{2}\right) = y_0\left(1 + \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_k + k_2\frac{h}{2}\right) = y_0\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right),$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3 h) = y_0\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= y_0\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) = 1.04081077333333. \end{aligned}$$

O erro obtido é

$$|e^{0.04} - y_1| = 8.5906 \times 10^{-10}.$$

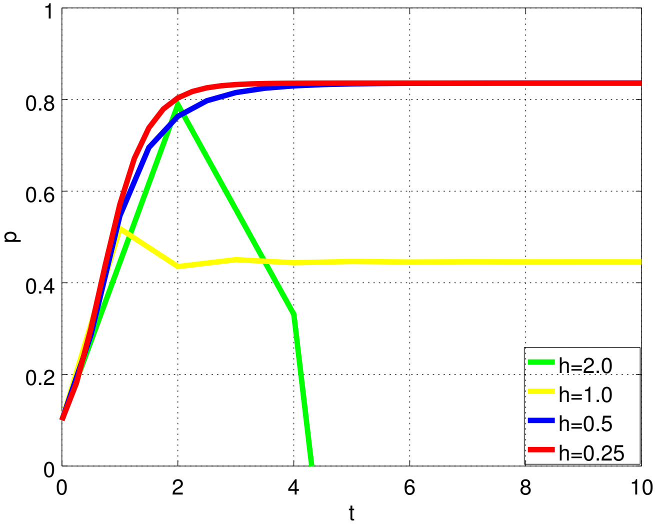
Exemplo 2

Suponha que a densidade populacional p de lagartas seja descrita pelo PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 2p\,(1-p) - \dfrac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = 0.1, \end{cases}$$

Use o método de Heun e o método de Runge-Kutta de ordem 4 para estimar p para $0 \leq t \leq 10$.

Usando o método de Heun com diferentes valores de h, encontramos:



Aproximações para $p(10)$:

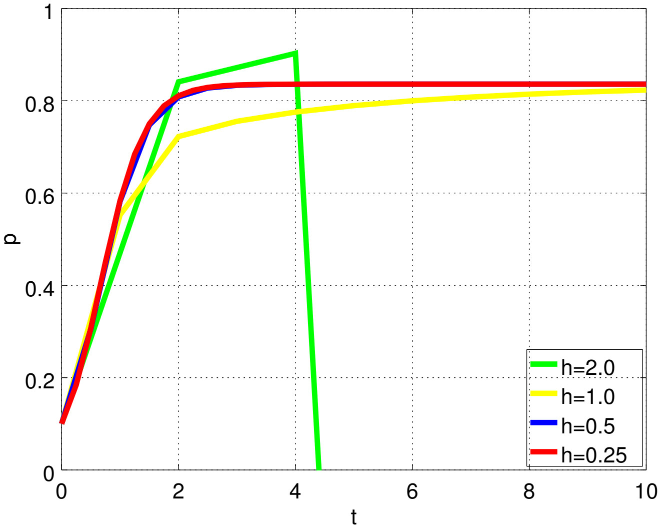
h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-3591.8	0.44582	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos um erro significativo para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Contudo, precisamos fazer 20 passos do método!

Podemos mostrar que o método de Euler Aperfeiçoado é um método de ordem 2!

O método de Runge-Kutta fornece



Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-2.2×10^17	0.81923	0.83597	0.83597

Comentários:

- Encontramos erro significativos para $h \geq 1.0$.
- Comparando o gráfico, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
  Portanto, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.5$! Nesse caso, efetuamos 20 iterações do método!

Podemos mostrar que esse método de Runge-Kutta é de fato um método de ordem 4!

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de Runge-Kutta.

Especificamente, apresentamos o método de Heun e um método de Runge-Kutta de ordem 4.

Diferente dos métodos de série de Taylor, os métodos de Runge-Kutta não requerem nenhuma derivada de f.

Porém, utilizam uma função auxiliar ϕ que é obtida avaliando f em diferentes pontos.

Muito grato pela atenção!