MS211 - Cálculo Numérico

Solução Numérica de Problemas de Valor Inicial: Método de Euler e Métodos de Série de Taylor (Slides Modificados de M. E. Valle)

Equações Diferencias Ordinárias (EDO)

- Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas de funções.
- Uma equação diferencial ordinária possui apenas uma variável independente. Considere por exemplo
  1. $y' = y$;
  2. $y' = \cos(x)$;
  3. $y' = 2\frac{y}{x}, x \neq 0$;
- A ordem de uma EDO é a ordem mais alta da derivação nela.
- Uma solução de uma equação diferencial é uma função que satisfaz a equação.
- Uma equação diferencial possui uma família de soluções.

Soluções Gerais e Particulares de EDOs

- A solução geral de uma EDO é a forma do conjunto de todas as soluções.
- Uma solução particular é uma destas soluções.

Exemplos

1. A solução geral de $y' = y$ é $y = c \cdot e^x$ e $y = e^x$ é uma das soluções particulares.
2. A solução geral de $y' = \cos(x)$ é $y = \sin(x) + c$ e $y = \sin(x)$ é uma das soluções particulares.
3. A solução geral de $y' = 2\frac{y}{x}$ para $x \neq 0$ é $y = c \cdot x^2$ e $y = x^2$ é uma das soluções particulares.

Campo de Direções

Uma equação $y' = f(x, y)$ determina um campo de direções. Considere por exemplo $y' = y$. Toda solução particular passa pelo campo de direções. Sob algumas condições, uma solução particular é determinada por um valor em um ponto.

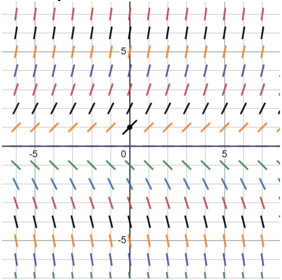


Figura: Campo de direções de $y' = y$ (veja Desmos.com). Note que a solução particular $y = e^x$ satisfaz $y(0) = 1$

Problemas de Valor Inicial

Em seguida, estudaremos métodos numéricos para **problemas de valor inicial** (PVI) formulados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[y] = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

em que f é uma função das variáveis x (variável independente) e y (variável dependente).

A equação

$$y(x_0) = y_0,$$

com x_0 e y_0 dados, é chamada **condição inicial.**

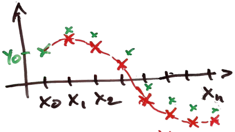
A solução de um PVI, quando existe, é uma função y que depende de x e satisfaz a condição inicial. Assumiremos que o PVI possui uma única solução!

Métodos Numéricos para a Resolução de PVIs

met's numéricos para a resolução de eq.'s dif's ordinárias:

Dado o PVI: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

e $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ igualmente espaçados, o objetivo é estimar $y(x_k)$



y desconhecido

Vamos gerar $y_k \approx y(x_k)$ para $k=1,\ldots,n$

Métodos Numéricos para a Resolução de PVIs

Temos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$h = x_{k+1} - x_k \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

$$= \frac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow x_k = x_0 + kh \quad \forall k = 0, \dots, n-1$$

Queremos determinar $y(x_k) = y(x_0 + kh)$

Geramos $y_k \approx y(x_k)$ $k = 0, 1, \dots, n$

Existem

1. Métodos de Passo 1: utilizam apenas y_{k-1} para determinar y_k, onde $k = 1, \dots, n$
2. Métodos de Passo 2: Usam y_{k-1} e y_{k-2} para determinar y_k, onde $k = 2, \dots, n$

Ideia dos Métodos Numéricos para PVI

Os métodos numéricos para a resolução de um PVI fornecem uma estimativa para $y(x)$ em pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Por simplicidade, assumiremos que os pontos são igualmente espaçados, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

em que h é chamado **tamanho do passo**.

Denotaremos por y_k a estimativa de $y(x_k)$, ou seja,

$$y_k \approx y(x_k), \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Temos um **método de passo simples** ou *passo um* se y_k é determinado usando apenas y_{k-1}. Caso contrário, temos um **método de passo múltiplo.**

Exemplo 1

A população p de algumas lagartas podem ser descritas pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{k}\right) - \frac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = p_0, \end{cases}$$

em que p_0 é a população inicial (no instante $t = 0$), r está relacionado à taxa de reprodução da lagarta e k à quantidade de folhas disponíveis na planta. O termo $\frac{p^2}{1+p^2}$ descreve a predação da lagarta (por pássaros, por exemplo).
Considerando $r = 2$, $k = 1$ e $p_0 = 0.1$, qual será a população de lagartas no instante $t = 10$?

Podemos determinar $p(10)$ usando um método numérico!

Ideia do Método de Euler

Considere um PVI

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[y] = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Como conhecemos a derivada $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, podemos aproximar y pela reta r_0 que passa por (x_0, y_0) com coeficiente angular $y'(x_0)$, ou seja, aproximamos y por

$$r_0(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Com essa aproximação, encontramos

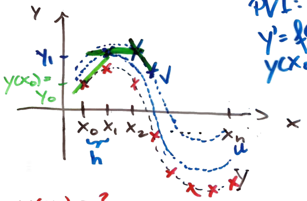
$$y_1 = r_0(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h,$$

em que $x_1 = x_0 + h$.

Observações referentes o Método de Euler

O Método de Euler

PVI:
$y' = f(x,y)$
$y(x_0) = y_0$



$y(x_1) = ?$

Sabemos que perto de x_0 temos

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

Em particular,

$$y(x_1) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$= y_0 + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{y_0'} \cdot h =: y_1$$

$y(x_2) = ?$

$$y(x_2) \approx y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$\approx y_1 + f(x_1, y(x_1)) \cdot h$$
$$\approx y_1 + \underbrace{f(x_1,y_1)}_{y_1'} \cdot h =: y_2$$

Observações referentes o Método de Euler

Note que u satisfaz o

PVI: $u' = f(x,u)$
$u(x_1) = y_1$

v satisfaz o PVI: $v' = f(x,v)$
$v(x_2) = y_2$

Obtemos

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + \underbrace{\overbrace{f(x_k, y_k)}^{y_k' \approx y'(x_k)} \cdot h}_{\Delta y_k}$$

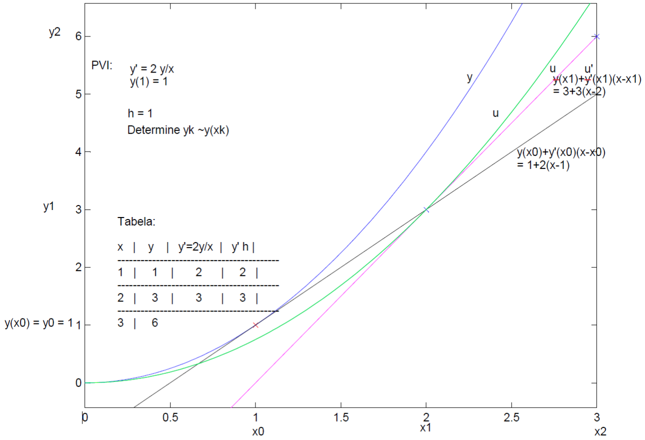
Aqui utilizamos

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$
$$= y(x_k) + y'(x_k) \cdot h$$
$$\approx y_k + y_k' \cdot h$$

$\forall k$ temos PVI:

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_k) = y_k \end{array}\right\}$$

Interpretação Gráfica do Método de Euler



O Método de Euler em Forma Tabelar

Exemplo:

Seja $y' = 2\frac{y}{x}$, $x \neq 0$

$y(1) = -2$, $h = 0.1$

Calcule $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$

Qual é a solução exata do PVI acima? $-2x^2 = y(x)$

x	y	$y' = 2\frac{y}{x}$	$\Delta y = y' \cdot h$
1	-2	-4	-0.4
1.1	-2.4	-4.3636	-0.4364
1.2	-2.8364	-4.7273	-0.4727
1.3	-3.3091	-5.0909	-0.5091
1.4	-3.8182	-5.4545	-0.5455
1.5	-4.3636		

Nesta tabela não é necessário colocar os índices k. A $k+1$-ésima linha contem x_k, y_k, $y'_k = 2\frac{y_k}{x_k}$ e $\Delta y_k = y'_k \cdot h$.

Erros Globais e Locais

Definição

O erro global no passo k, sendo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, de um método númerico para a resolução de um PVI, é dado por

$$y(x_k) - y_k.$$

O erro local no passo k, sendo $k \in \{1, \ldots, n\}$, é dado por

$$e(x_{k-1}) := u_{k-1}(x_k) - y_k,$$

sendo u_{k-1} a solução particular que passa por (x_{k-1}, y_{k-1}).

Exemplos de Erros Globais e Locais

Considere o slide da interpretação gráfica do método de Euler.

- A solução do PVI é $y = x^2$ porque $y' = 2x = 2 \cdot \frac{x^2}{x} = 2 \cdot \frac{y}{x}$ (para $x \neq 0$) e $y(1) = 1^2 = 1$.
- $y(x_0) - y_0 = 0$ e $y(x_1) - y_1 = y(2) - 3 = 2^2 - 3 = 1$ (erro global no passo 1).
- Note que $u_0 = y$. Portanto, $u_0(x_1) - y_1 = y(x_1) - y_1 = 1$ (erro local = erro global no passo 1).

Exemplos de Erros Globais e Locais

Considere o slide da interpretação gráfica do método de Euler.

- Note que $y(x_2) - y_2 = 3^2 - 6 = 3$ (erro global no passo 2).
- $u = u_1$ é a solução do PVI

$$\begin{cases} u' = 2 \cdot \frac{u}{x}, \ (x \neq 0) \\ u(2) = 3. \end{cases}$$

- Sabemos que $u = cx^2$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Além disso, $3 = u(2) = c \cdot 2^2 = 4c$. Portanto, $c = \frac{3}{4}$ e daí $u = \frac{3}{4}x^2$.
- $u_1(x_2) - y_2 = u(x_2) - y_2 = u(3) - 6 = \frac{3}{4}3^2 - 6 = \frac{3}{4}$.

O Método de Taylor de Ordem p

Métodos de Série de Taylor:

O mét. de Euler é um caso especial dos méts de série de Taylor que são baseados no desenvolvimento de serie de Taylor.

Supor que temos $x_0, x_1, \ldots, x_k$
$y_0, y_1, \ldots, y_k$

desenvolvimento da série de Taylor em torno de x_k:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{(p)}(x_k)}{p!}(x-x_k)^p + \frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}(x-x_k)^{p+1}$$

onde ξ é entre x_k e x

O Método de Taylor de Ordem p

De um modo geral, se y for suficientemente suave, a série de Taylor de y centrada em x_k é

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \ldots + y^{(p)}(x_k)\frac{h^p}{p!} + y^{(p+1)}(\xi)\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \quad \text{para algum } \xi \in (x_k, x_{k+1}).$$

Assim, num método de Série de Taylor de ordem p, definimos

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + \frac{1}{2} y_k'' h^2 + \ldots + \frac{1}{p!} y_k^{(p)} h^p,$$

em que $y_k^{(i)}$ representa uma aproximação para a i-ésima derivada de y em x_k e $h = x_{k+1} - x_k$.

O Método de Taylor de Ordem p

Na 1ª it. do mét. de Taylor de ordem p

$$y_1 = y_0 + y_0' h + y_0'' \frac{h^2}{2} + \dots + y_0^{(p)} \frac{h^p}{p!}$$

$y_1 \approx y(x_1)$, $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, $y_0'' = y''(x_0)$, $y_0^{(p)} = y^{(p)}(x_0)$

O único erro que fazemos é o erro local de truncamento

$$e(x_0) = y^{(p+1)}(\xi) \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

(ξ entre x_0 e x_1)

Na $(k+1)^a$ it, onde $k > 0$, fazemos tb erros devido aos erros envolvidos em $y_k^{(i)} \approx y^{(i)}(x_k)$

Def: Um mét. numérico é de ordem p $\Leftrightarrow$ o erro local $|e(x_k)| \leq C \cdot h^{p+1}$ para algum C

O Método de Taylor de Ordem p

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \ldots + y^{(p)}(x_k)\frac{h^p}{p!}$$
$$+ y^{(p+1)}(\xi)\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \quad \text{para algum } \xi \in (x_k, , x_{k+1}).$$

No método de Taylor de Ordem p usamos

$$y(x_{k+1}) \approx y_k + y_k' h + y_k'' \frac{h^2}{2} + \ldots + y_k^{(p)} \frac{h^p}{p!},$$

sendo $y_k^{(i)} \approx y^{(i)}(x_k)$ para $i = 0, 1, \ldots p$.

Além dos erros devidos a essas aproximações, tem o "erro local de truncamento" $e(x_k) = y^{(p+1)}(\xi)\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$.

O Método de Taylor de Ordem p

Estimada para $e(x_k)$:

$$e(x_k) = y^{(p+1)}(\xi)\,\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

onde ξ entre x_k e x_{k+1}

Seja $M_{p+1} = \max\limits_{x \in I} |y^{(p+1)}(x)|$

(supomos que $y^{(p+1)}$ é função contínua onde $I = [x_0, x_n]$ é o intervalo de discretização (nosso intervalo de interesse)

Sabemos que $|y^{(p+1)}(\xi)| \leq M_{p+1}$

$$\Rightarrow |e(x_k)| \leq M_{p+1} \cdot \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$= C \cdot h^{p+1}$$

Onde $C = \dfrac{M_{p+1}}{(p+1)!}$

então o mét. de Taylor

$y_{k+1} = y_k + y_k' \cdot h + \dots + y_k^{(p)} \cdot \dfrac{h^p}{p!}$ é de ordem p

Ordem de um Método Numérico para PVI

Definição

Um método numérico para PVI é dito de ordem p se existe uma constante C tal que os erros locais satisfazem

$$|e(x_k)| \leq Ch^{p+1},$$

em que C é uma constante que pode depender das derivadas da variável dependente y do PVI.

Para todo $p \in \mathbb{N}$, $\exists$ um método de série de Taylor de ordem p.

Em particular, o método de Euler é um método de ordem 1.

O Método de Taylor de Ordem 2

Considere um PVI da forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

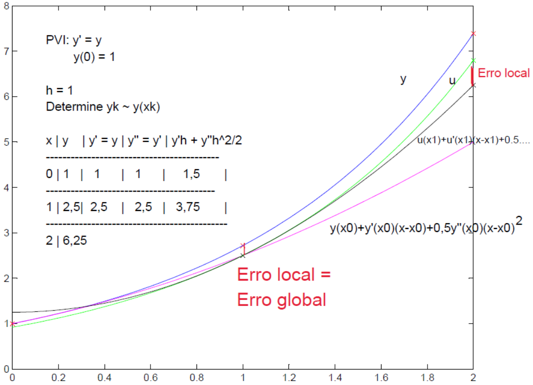
Para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$, sabemos que

$$y(x) \approx y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x - x_k)^2}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &\approx y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + y''(x_k)\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\ &\approx y_k + f(x_k, y_k)h + \frac{d}{dx}\left[f(x, y]\right(x_k)\frac{h^2}{2} \\ &= y_k + y'_k h + y''_k \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Interpretação Gráfica do Método de Taylor de Ordem 2



O Método de Taylor

- Considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' &= 2\frac{y}{x}, x \neq 0 \\ y(1) &= -2 \end{cases}$$

  - Note que $y = -2x^2$ é solução deste problema.
  - Considere $h = 0.1$. Uma aplicação do método de Taylor de ordem 2 resulta em estimadas para $y(1.1)$, $y(1.2)$, $\ldots, y(1.5)$. Quais são os erros globais e locais?

x	y	$y' = 2\frac{y}{x}$	$y'' = 2\frac{y'x-y}{x^2}$	$\Delta y = y'h + y'' \cdot \frac{h^2}{2}$
1	-2	-4	-4	-0.42
1.1	-2.42	-4.4	-4	-0.46
1.2	-2.88	-4.8	-4	-0.5
1.3	-3.38	-5.2	-4	-0.54
1.4	-3.92	-5.6	-4	-0.58
1.5	-4.5			

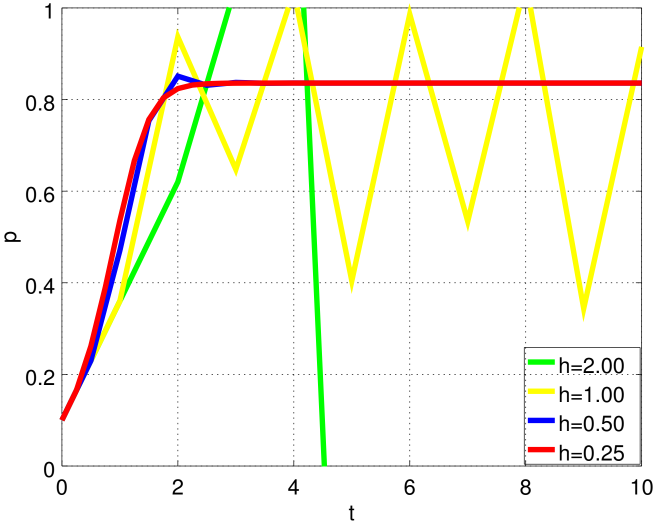
Exemplo 2

Suponha que a densidade populacional p de lagartas seja descrita pelo PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = 2p\,(1-p) - \dfrac{p^2}{1+p^2}, \\ p(0) = 0.1, \end{cases}$$

Vamos usar um método numérico para estimar p para $0 \leq t \leq 10$.

Usando o método de Euler com diferentes valores de h, obtemos:



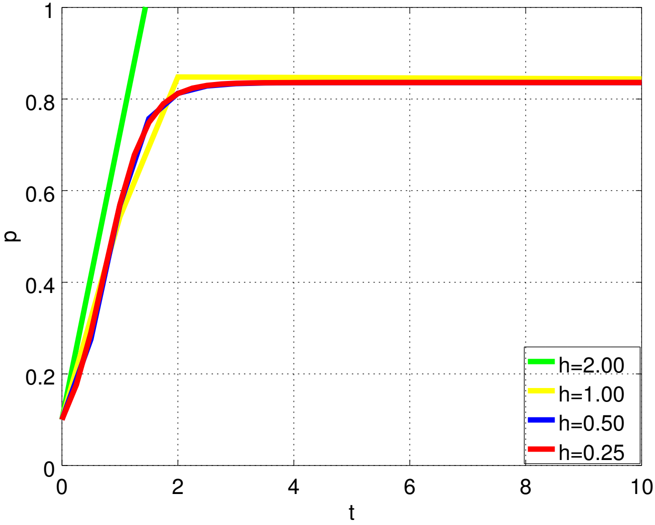
Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	-1.07×10^5	0.91505	0.83597	0.83597

Comentários:

- O método de mostrou instável para $h \geq 1.0$.
- Pela tabela, resultados semelhantes foram obtidos considerando $h = 0.5$ e $h = 0.25$.
- Contudo, olhando o gráfico, percebemos algumas diferenças nos primeiros passos para $h = 0.5$.
- Concluindo, podemos acreditar que encontramos um bom resultado com $h = 0.25$! Nesse caso, fizemos 40 passos do método de Euler!

Usando O Método de Taylor de ordem 2 com diferentes valores de h, temos:



Aproximações para $p(10)$:

h	2.0	1.0	0.5	0.25
$y(10)$	1.49×10^{47}	0.84385	0.83597	0.83597

Comentários:

- Diferente do método de Euler, o método de ordem 2 não divergiu para $h = 1.0$. Porém, observamos no gráfico algumas diferenças nas primeiros passos para $h = 1.0$.
- Resultados semelhantes foram obtidos considerando $h \leq 0.5$.
- Concluindo, podemos acreditar que encontramos um resultado satisfatório com $h = 0.5$! Nesse caso, efetuamos 20 passos do método de Taylor de ordem 2!

Conclusão do Exemplo:
Comparando os métodos de ordem 1 (Euler) e ordem 2, iremos preferir o método de ordem 2.

Porém, para aplicar um método de série de Taylor de ordem 2, precisamos conhecer as derivadas parciais de f.

Na próxima aula, apresentaremos métodos de ordem ≥ 2 que não requerem as derivadas parciais de f.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos os métodos de série de Taylor e uma fórmula para o erro local (erro cometido a cada passo).

Em particular, vimos que o método de Euler é um método de ordem 1. Consequentemente, o erro local é da ordem de h^2.

Podemos obter erros menores considerando métodos de ordem maior. Contudo, no caso dos métodos da série de Taylor, temos que calcular derivadas parciais de f.

Finalmente, ressaltamos que geralmente efetuamos diversos passos para chegar na aproximação x_n. Portanto, há um acumulo de erros!

Muito grato pela atenção!