MS211 - Cálculo Numérico

Métodos de Newton(-Raphson) e da Secante
(Slides Modificados de M. E. Valle)

Introdução

Nas aula anterior iniciaremos os estudos sobre métodos numéricos para aproximar a solução do seguinte problema:

Zero de uma Função Real

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, determine, se possível, $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi) = 0.$$

Nesse caso, ξ é chamado **zero** (ou **raiz**) de f. Dizemos também que ξ é uma solução da equação $f(x) = 0$. Denotaremos por $\tilde{\xi}$ a aproximação de ξ fornecida por um método numérico.

Na aula anterior, apresentamos os métodos da **bisseção** e da **posição falsa**, ambos baseados no teorema do valor intermediário. Vimos também o método do **ponto fixo**.

Método do Ponto Fixo

Dizemos que ξ é um **ponto fixo** de uma função real φ se

$$\xi = \varphi(\xi).$$

Dada uma aproximação inicial x_0, definimos

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Se φ é uma função com derivada φ' contínua em um intervalo I, centrado no ponto fixo ξ, com $|\varphi'(x)| \leqslant M < 1$ para todo $x \in I$, então para qualquer aproximação inicial $x_0 \in I$, a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ produzida pelo método do ponto fixo converge para ξ.

A convergência do método do ponto fixo será tanto mais rápida quanto menor for o valor de M.

Motivação Geométrica para o Método de Newton

O método de Newton tem a seguinte interpretação geométrica.

Considere a reta tangente à f no ponto $(x_k, f(x_k))$ dada por

$$L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Define-se x_{k+1} como sendo a raiz de L, que pode ser vista como uma aproximação linear de f numa vizinhança de x_k.

Formalmente, $L(x_{k+1}) = 0$ se, e somente se,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

O Método de Newton-Raphson

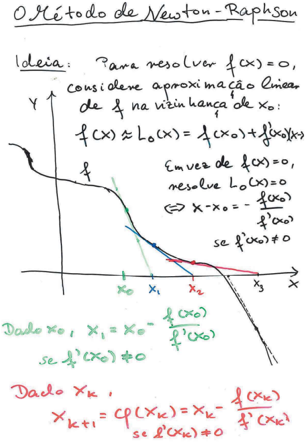


Figura: Interpretação geométrica.

Exemplos de Passos do Método de Newton-Raphson

Exemplo:

$$f(x) = e^x - 1$$

$$\xi = 0$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 1}{e^x}$$

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = 0.10653065\underline{9}$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 0.0055$$

$$x_3 = 1.50 \cdot 10^{-5}$$

$$|e_k| = |x_k - \xi|$$

Exemplo de Aplicação do Método de Newton-Raphson

Exemplo (Newton)

Vamos utilizar Matlab no formato ponto flutuante com $t = 5$.

$f(x) = e^{x} - \ln x - 3$, onde $x > 0$

$f'(x) = e^{x} - \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$x_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$

k	x_k	$\lvert f(x_k) \rvert$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	$0.10000 \cdot 10^{1}$	$0.28172 \cdot 10^{0}$	—
1	$0.11640 \cdot 10^{1}$	$0.50747 \cdot 10^{-1}$	$0.16395 \cdot 10^{0}$
2	$0.11423 \cdot 10^{1}$	$0.92076 \cdot 10^{-3}$	$0.21655 \cdot 10^{-1}$
3	$0.11419 \cdot 10^{1}$	$0.32411 \cdot 10^{-6}$ $< 10^{-4}$ PARE!	

Resultado: um dos zeros é aproximadamente 1.1419

Exemplo 1

Use o método de Newton para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

com aproximação inicial $x_0 = 1$ e tolerâncias $\epsilon_1 = 0.1$ e $\epsilon_2 = 0.1$. Em outras palavras, paramos se $|f(x_k)| < \epsilon_1$ ou se $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon_2$. Interprete geometricamente o método de Newton.

Resposta:

Primeiramente, observe que

$$f(x) = e^x - 2x - 1 \quad \text{e} \quad f'(x) = e^x - 2.$$

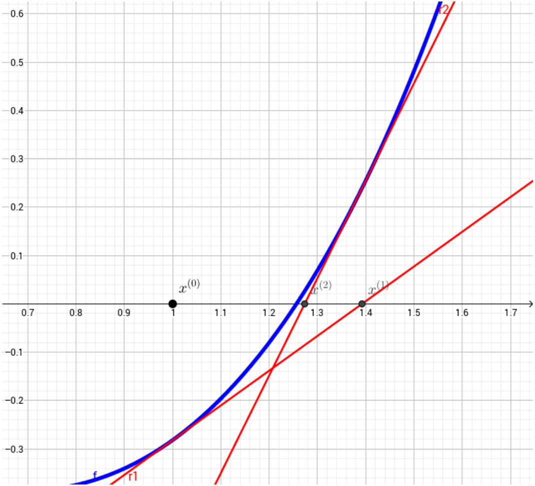
Começando com a aproximação inicial $x_0 = 1$, construímos a seguinte tabela:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1.00000	-0.28172	0.71828	—
1	1.39221	0.23932	2.02374	0.39221
2	1.273957	0.027057	—	—

Terminamos as iterações porque a condição $|f(x_k| < \varepsilon$ foi satisfeita.

A aproximação fornecida pelo método de Newton é $\tilde{\xi} = 1.273957$.

Interpretação Geométrica neste Exemplo



Ordens de Convergência: Motivação

Exemplo

Considere as seqüências $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$

$\{x_k\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$\{y_k\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \ldots$

Obs.: $x_{k+1} = \frac{1}{2} x_k \quad k = 1, 2, \ldots$

$y_{k+1} = (y_k)^2 \quad k = 1, 2, \ldots$

Qual é a seqüência que converge mais rapidamente para 0?

$$L = 0$$

$$|e_k| = |x_k - L| = |x_k|$$

1. Para x_k temos
$|e_{k+1}| = \frac{1}{2} |e_k|$

2. Para y_k temos
$|e_{k+1}| = e_k^2$

Ordens de Convergência

Definição 2 (Convergência Linear e Quadrática)

Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, uma sequência de aproximações produzida por um método numérico.

- Dizemos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **converge linearmente** para ξ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = c, \quad \text{com } 0 < c < 1.$$

- Dizemos que a **ordem de convergência** é $p > 1$ se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = c, \quad \text{com } 0 < c.$$

Em particular, se $p = 2$, tem-se **convergência quadrática.**

Teorema 3 (Convergência do Método de Newton)

Seja f uma função contínua com derivadas de primeira e segunda ordem f' e f'' contínuas em um intervalo I que contém uma raiz ξ de f. Se $f'(\xi) \neq 0$ então existe um subintervalo $\bar{I} \subseteq I$, que contém ξ, tal que a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo método de Newton converge pelo menos quadraticamente para ξ para todo $x_0 \in \bar{I}$.

Demonstração da convergência pelo menos quadrática:
O desenvolvimento de Taylor de f em torno de x_k fornece

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x - x_k)^2,$$

para algum $\eta^{(k)}$ entre x e x_k. Tomando $x = \xi$, encontramos

$$f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x_k - \xi)^2 = 0.$$

Portanto,

$$f'(x_k)(x_k - \xi) - f(x_k) = \frac{1}{2}f''(\eta^{(k)})(x_k - \xi)^2.$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por $f'(x_k)$ (note isto é possível se x_k está suficientemente perto de ξ porque f' é contínua e $f'(\xi) \neq 0$), obtemos

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \xi = \frac{f''(\eta^{(k)})}{2f'(x_k)}(x_k - \xi)^2.$$

Continuando, obtemos

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{(x_k - \xi)^2} = \frac{f''(\eta^{(k)})}{2f'(x_k)}.$$

Finalmente, sendo f' e f'' contínuas e, como ambas sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\eta^{(k)}\}$ convergem para ξ, concluímos que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \lim_{k \to \infty} \frac{|f''(\eta^{(k)})|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|} = c.$$

Logo, o método de Newton tem convergência pelo menos quadrática sob as condições do teorema.

Portanto temos: Se $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gerado pelo método de Newton converge para ξ (por ex., se as condições do Teorema do Ponto Fixo são satisfeitas) e se $x_0, x_1, x_2, \ldots$ estão contidos num intervalo $\bar{I} \subseteq I$ tal que $\xi \in \bar{I}$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \bar{I}$, então $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge com ordem $\geqslant 2$ para ξ.

Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter e avaliar f' a cada iteração.

No método da secante, substituímos a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

em que x_k e x_{k-1} representam duas aproximações para ξ.

Geometricamente, dadas as aproximações x_{k-1} e x_k, defina x_{k+1} como sendo a abcissa do ponto de intersecção do eixo horizontal com a reta secante que passa pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

Definição 4 (Método da Secante)

Dada uma função f e duas aproximações iniciais x_0 e x_0 da raiz ξ de f, defina a sequência para $k = 1, 2, \ldots$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

ou, equivalentemente,

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Espera-se que a sequência x_k convirja para uma raiz ξ!

Interpretação Gráfica do Método da Secante

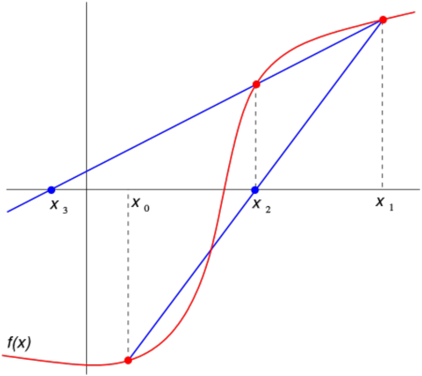


Figura: Interpretação gráfica das primeiras iterações (retirado de Wikipedia).

Teorema 5 (Convergência do Método da Secante)

Suponha que f e sua derivada f' são contínuas num intervalo I que contém uma raiz ξ de f. Se $f'(\xi) \neq 0$ e x_0 e x_1 são suficientemente próximos de ξ, então a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ produzida pelo método da secante converge para ξ com

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = c,$$

em que $c > 0$ e $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6$.

Exemplo 6

Use o método da secante para encontrar uma estimativa para a raiz **positiva** da função

$$f(x) = e^x - 2x - 1,$$

com aproximações iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ e tolerâncias $\delta = 0.1$ e $\epsilon = 0.1$. Interprete geometricamente o método da secante.

Resposta:
Começando com as aproximações $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$, construímos a tabela abaixo:

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1.0000	-0.28172	—
1	2.0000	2.3891	1.0000
2	1.10548	-0.19028	0.89452
3	1.171473	-0.116204	0.06600

Terminamos as iterações com $k = 3$ porque a condição $|x_k - x_{x-1}| < 0.1$ foi satisfeita.
A aproximação fornecida pelo método da Secante é $\tilde{\xi} = 1.171473$.

Considerações Finais

Na aula de hoje demonstramos a convergência pelo menos linear do método do ponto fixo.

Depois apresentamos o método de Newton, que possui convergência quadrática. Geometricamente, a próxima aproximação do método de Newton é obtida encontrando a raiz de uma aproximação linear da função.

Finalmente, apresentamos o método da secante, que possui convergência superlinear. O método da secante pode ser visto como uma aproximação do método de Newton sem calcular a derivada da função f.

Muito grato pela atenção!