MS211 - Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial
(Slides Modificados de M. E. Valle)

Nas aulas anteriores, vimos o problema de ajuste de curvas pelo método dos quadrados mínimos.

No caso discreto, vimos como encontrar uma função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

que melhor se ajusta a uma tabela

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m

em que $g_1, \ldots, g_n$ são funções escolhidas *a priori*.

O termo "melhor se ajusta" significa que a soma dos quadrados dos desvios $\varphi(x_k) - y_k$ é mínima, ou seja,

$$E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\varphi(x_k) - y_k\Big)^2,$$

é mínimo.

Problema de Interpolação

No problema de interpolação, dada uma tabela

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n

com $x_1, x_2, \dots, x_n$ distintos, procuramos uma função φ que **interpola** os pontos tabelados, ou seja, impomos

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são chamados **nós de interpolação.**

Podemos pensar que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

em que f é uma função complicada ou desconhecida.

Interpolação Polinomial

Na interpolação polinomial, a função φ que procuramos é um polinômio de grau menor ou igual à n.

Dessa forma, dada uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

queremos encontrar um polinômio de grau menor ou igual à n, denotado por p_n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

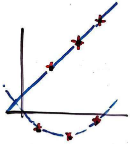
Teorema sobre Interpolação Polinomial

Teorema:

Dado $n+1$ nós de interpolação (x_i, y_i), $i=0,1,\ldots,n$, & $y_i = f(x_i)$ com $x_j \neq x_k$ $\forall j \neq k$

existe um único polinômio p_n de grau $\leq n$ que interpola f

i.e. tal que $p_n(x_i) = y_i$, $i=0,1,\ldots n$



$\exists!$ pol. de grau ≤ 2 que interpola os 3 pontos

Forma de Vandermonde

O polinômio p_n pode ser escrito como

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n.$$

Dessa forma, devemos encontrar $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$p_n(x_k) = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \ldots + \alpha_n x_k^n = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

que corresponde à um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas.

Na forma matricial, temos

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y},$$

em que

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

é chamada **matriz de Vandermonde**,

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar que $\det(\mathbf{V}) \neq 0$ se os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem distintos.

Consequentemente, o sistema $\mathbf{V}\alpha = \mathbf{y}$ admite uma única solução.

Logo, vale o teorema:

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ com $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$. Nesse caso, existe um único polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual a n tal que $p_n(x_k) = y_k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

Exemplo 2

Use a forma de Vandermonde para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 2

Use a forma de Vandermonde para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

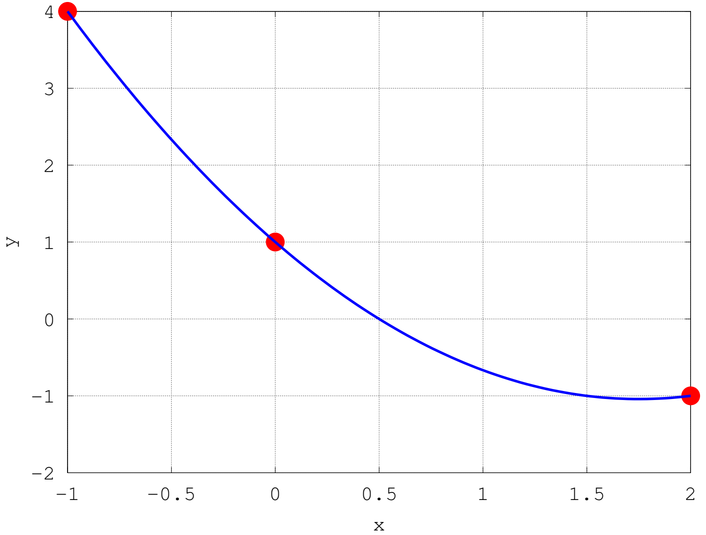
Resposta: Os coeficientes do polinômio

$$p_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2,$$

são obtidos resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Encontramos assim o polinômio $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$.


4
3
2
1
0
−1
−2
y
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

Razões para Evitar o Uso da Forma de Vandermonde

A forma de Vandermonde requer a resolução de um sistema linear $(n+1) \times (n+1)$, em que n denota o grau do polinômio interpolador.

A matriz de Vandermonde costuma ser **mal condicionada**, quer dizer, pequenas perturbações nos dados podem provocar grandes perturbações nas soluções de um sistema linear com esta matriz de coeficientes.

Portanto, os coeficientes do polinômio interpolador obtido podem conter erros significativos.

Existem formas alternativas de encontrar o polinômio interpolador que não utilizam a matriz de Vandermonde.

Com efeito, o polinômio interpolador p_n pode ser escrito como

$$p_n(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x),$$

em que as funções base $g_0, g_1, \ldots, g_n$ são polinômios de grau menor ou igual à n.

O polinômio interpolador é obtido resolvendo o sistema linear $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{y}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & g_2(x_0) & \ldots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & g_2(x_n) & \ldots & g_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Na forma de Vandermonde, temos os monômios

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad \ldots \quad g_n(x) = x^n.$$

Forma de Lagrange

Na forma de Lagrange, as funções base, denotadas por $L_0, L_1, \ldots, L_n$, são definidas tais que **A** é a matriz identidade:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & \text{caso contrário}, \end{cases} \qquad \forall k, i = 0, \ldots, n.$$

Logo, a forma de Lagrange fornece o polinômio interpolador

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) \\ &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \end{aligned}$$

Os Polinômios Base da Forma de Lagrange

Note que os polinômios base devem ser de grau n da forma

$$L_k(x) = c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n).$$

Note que $1 = L_k(x_k) = c_k \cdot \prod_{i \neq k}(x_k - x_i) \Rightarrow c_k = \frac{1}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)}$

Portanto,

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Exemplo 3 (Interpolação Linear)

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau 1 que interpola os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exemplo 3 (Interpolação Linear)

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau 1 que interpola os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Resposta: Usando a forma de Lagrange, temos

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x),$$

em que

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Assim,

$$p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0(x_1 - x) + (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0}$$

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Resposta: Primeiramente, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-2)}{(-1)(-3)} = \frac{x^2 - 2x}{3},$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1)(-2)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2},$$

e

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{(3)(2)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

Exemplo 4

Use a forma de Lagrange para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Dessa forma,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\ &= 4\frac{x^2 - 2x}{3} + 1\frac{-x^2 + x + 2}{2} + (-1)\frac{x^2 + x}{6} \\ &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1, \end{aligned}$$

que é o mesmo polinômio obtido usando a forma de Vandermonde.

Forma de Newton

Note que determinar p_n através da forma de Lagrange é computacionalmente custoso e pode levar a erros numéricos.

Forma de Newton

Podemos interpolar $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ utilizando um poli. $p_n(x)$ de grau $\leq n$ onde

$$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

f_i são dadas pelo operador de diferenças divididas

Forma de Newton

Consequentemente, na forma de Newton, o polinômio interpolador é

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

em que $f_0, f_1, \dots, f_n$ são a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & (x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Os coeficientes $f_0, \dots, f_n$ podem ser obtidos usando substituição direta.

Observações Referentes a Forma de Newton

No método de Newton, escolhemos polinômios base de modo que o sistema linear resultante seja triangular inferior.

Especificamente, escolhemos os polinômios base

$$
\begin{aligned}
N_0(x) &= 1, \\
N_1(x) &= x - x_0, \\
N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\
&\vdots \\
N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Operador Diferenças Divididas

Equivalentemente, os coeficientes $f_0, \ldots, f_n$ podem ser calculados usando o **operador diferenças divididas**:

- *Ordem 0:* $f_0 = f[x_0] = f(x_0) = y_0.$
- *Ordem 1:* $f_1 = f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1}.$
- *Ordem 2:*

$$f_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}.$$

- *Ordem n*:

$$f_n = f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Operador Diferenças Divididas

Para poder calcular $f_0, \ldots, f_n$ precisa-se empregar o **operador diferenças divididas** na sua forma geral:

- *Ordem 0:* $f[x_k] = f(x_k) = y_k$ para $k = 0, \ldots, n$.
- *Ordem 1:* $f[x_{k-1}, x_k] = \dfrac{f[x_{k-1}] - f[x_k]}{x_{k-1} - x_k}$ para $k = 1, \ldots, n$.
- *Ordem 2:*
$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}] - f[x_{k-1}, x_k]}{x_{k-2} - x_k}$$
para $k = 2, \ldots, n$.
- *Ordem n:*
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Na prática, podemos construir a seguinte tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	$\dots$	Ordem n
x_0	$y_0 = f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$y_1 = f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$y_2 = f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\ddots$	
x_3	$y_3 = f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$			$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	$\vdots$		
x_4	$y_4 = f[x_4]$	$\vdots$		$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\iddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$\iddots$			
x_n	$y_n = f[x_n]$	$\iddots$				

Usando o operador diferenças divididas, os coeficientes $f_0, f_1, \ldots, f_n$ são dados por

$$f_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ & + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

Na prática, avaliamos o polinômio interpolador p_n fornecido pela forma de Newton usando **parênteses encaixados**.

Parênteses Encaixados

O polinômio

$$p_n(x) = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}),$$

pode ser avaliado da seguinte forma:

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)\Big(f_1 + (x - x_1)(f_2 + \\ + (x - x_2)(f_3 + \dots + (x - x_{n-1})f_n))\Big).$$

Para o polinômio na forma de Newton, temos

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)\Big(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] + \\ + (x - x_2)(f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \dots + (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n]))\Big).$$

Tabela para a Forma de Newton

Tabela das Diferenças Divididas

Ordem

x	0	1	2	$\dots\dots$	n
x_0	$\overset{f_0}{f[x_0]}$	$\overset{f_1}{f[x_0,x_1]}$	$\overset{f_2}{f[x_0,x_1,x_2]}$	$\dots$	
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\dots$	$\overset{f_n}{f[x_0,x_1,\dots,x_n]}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f[x_3]$			$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$				
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1},x_n]$			

$$p_n(x) = f_0 + f_1(x-x_0) + f_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + f_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Exemplo para a Forma de Newton

Exemplo:

	x_0	x_1	x_2
x	0	1	2
$f(x)$	1	3	9

	Ordem		
x	0	1	2
0	1 f_0		
		$\frac{1-3}{0-1}=2$ f_1	
1	3		$\frac{2-6}{0-2}=2$ f_2
		$\frac{3-9}{1-2}=6$	
2	9		

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 1 + 2\cdot(x) + 2\cdot(x)(x-1) \\
&= 1 + 2x + 2(x^2 - x) \\
&= 1 + 2x^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Exemplo 5

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Resposta: Primeiramente, construímos a tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		2/3
		-1	
2	-1		

Exemplo 5

Use a forma de Newton para encontrar o polinômio de grau menor ou igual à 2 que interpola a tabela

x	-1	0	2
y	4	1	-1

Dessa forma,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 4 - 3(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)x \\ &= \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1, \end{aligned}$$

que é o mesmo polinômio encontrado antes.

Considerações Finais

Na aula de hoje, discutimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Apresentamos três formas para a interpolação polinomial:

1. **Forma de Vandermonde** – que apesar da simplicidade teórica, é computacionalmente caro além de ser numericamente instável.
2. **Forma de Lagrange** – que é rica do ponto de vista teórico mas também é computacionalmente cara.
3. **Forma de Newton** que, em conjunto com os **parênteses encaixados**, é o forma computacionalmente mais eficiente para determinar o polinômio interpolador.

Muito grato pela atenção!