MS211 - Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial Inversa
(Slides Modificados de M. E. Valle)

Vimos o problema de interpolação que consiste em determinar um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então tem-se $\forall x \in [x_0, x_n]$:

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \text{para algum } \xi_x \in [x_0, x_n].$$

Além disso, o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right|,$$

em que $M_{n+1} = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Em particular, se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem pontos igualmente espaçados, então

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que $h = x_{k+1} - x_k$.

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

então

$$|E_n(x)| \approx \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

Interpolação Inversa

Problema:

Considere uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\dots$	$y_n = f(x_n)$

Dado $\eta \in (y_0, y_n)$, determine $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f(\xi) = \eta$.

Basicamente, esse problema pode ser resolvido de 2 maneiras:

- Determinando o polinômio p_n que interpola f em $x_0, x_1, \dots, x_n$ e, em seguida, encontrando ξ tal que $p_n(\xi) = \eta$. Nesse caso, porém, não conseguimos obter *nenhuma estimativa sobre o erro*.
- Utilizando **interpolação inversa**.

Se $f(x)$ é inversível num intervalo contendo η, então podemos determinar o polinômio q_n que interpola f^{-1} em $y_0, y_1, \ldots, y_n$ e definimos $\xi = q_n(\eta)$.

Nesse caso, podemos usar as fórmulas anteriores para estimar o erro da interpolação inversa!

Uma condição para que uma função contínua f seja inversível em $[x_0, x_n]$ é que ela seja estritamente crescente ou decrescente.

Dado $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, admitimos que f é **estritamente crescente** se

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n,$$

e **estritamente decrescente** se

$$y_0 > y_1 > \ldots > y_n.$$

Exemplo 1

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^{\xi} = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente um limitante superior para o valor absoluto do erro.

Exemplo 1

Considere a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Determine ξ tal que $e^\xi = 1.3165$ usando interpolação inversa quadrática e apresente um limitante superior para o valor absoluto do erro.

Resposta: O polinômio q_2 que interpola f^{-1} em

$$y_0 = 1.2214, \quad y_1 = 1.3499 \quad \text{e} \quad y_2 = 1.4918,$$

é

$$q_2(y) = 0.2 + 0.7782(y - 1.2214) - 0.2718(y - 1.2214)(y - 1.3499)$$
$$= 0.2 + (y - 1.2214)\big[0.7782 - 0.2718(y - 1.3499)\big].$$

Assim,

Tabela da Forma de Newton para este Exemplo

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1.2214	0.2		
		0.7782	
1.3499	0.3		-0.2718
		0.7042	
1.4918	0.4		

Sabemos que o erro satisfaz

$$|E_2(y)| \leq |(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)| \frac{M_3}{3!}.$$

Sendo $g(y) = \ln(y)$, temos $g'''(y) = \frac{2}{y^3}$. Logo,

$$M_3 = \max_{1.2214 < y < 1.4918} \left| \frac{2}{y^3} \right| = \frac{2}{(1.2214)^3} = 1.0976.$$

e, portanto,

$$|E_2(1.3165)| \leq 0.0001.$$

Com efeito, sabemos que

$$e^{\xi} = 1.3165 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \ln(1.3165) = 0.27498.$$

Logo, o erro da interpolação inversa é de fato

$$|E_2(1.3165)| = |\ln(1.3165) - q_2(1.3165)| = 0.0001.$$

Exemplo 2

Utilize interpolação inversa quadrática para estimar o valor de ξ para o qual $f(\xi) = \sin(\xi) = 0.6$, baseado nos valores tabelados em baixo. Em seguida, determine um limitante superior para o valor absoluto do erro da sua

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemplo 2

Utilize interpolação inversa quadrática para estimar o valor de ξ para o qual $f(\xi) = \sin(\xi) = 0.6$, baseado nos valores tabelados em baixo. Em seguida, determine um limitante superior para o valor absoluto do erro da sua

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: No primeiro lugar, note que temos os valores seguintes de $g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$y = \sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$g(y)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

Tabela da Forma de Newton para este Exemplo

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0	0		
		$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$		0.3066
		1.264	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$		

Portanto, $q_2(y) = 0 + \frac{\pi}{3}y + 0.3066y(y - \frac{1}{2})$
$\implies q_2(0.6) = \frac{\pi}{3}0.6 + 0.3066 \cdot 0.6 \cdot 0.1 = 0.6467$
$\approx 0.6435 = \arcsin(0.6)$.

Exemplo 2

$$g'(y) = [\arcsin(y)]' = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g''(y) = -\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y)$$

$$g'''(y) = \frac{3}{4}(1-y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2y) - \frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{5}{4}}.$$

$$= -\frac{3}{2}(1-y^2)^{-\frac{5}{2}}y + (1-y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (1-y^2)^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{3}{2}y(1-y^2)^{-1}\right]$$

Podemos mostrar que essa função é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$g'''(0) = 1, \quad g'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -3.1716$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}} |g'''(y)| = \left|g'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \underbrace{3.1716}_{M_3}$$

$$\Rightarrow |E_2(0,6)| \leq (0.6)(0.1)\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.6\right| \cdot \frac{M_3}{3!}$$

$$\approx 0.33970 \cdot 10^{-2}$$

Consideraçõs Finais

No complemento da aula de hoje comentamos sobre a interpolação inversa, ou seja, a interpolação da função inversa f^{-1}.

A interpolação inversa pode ser usada para determinar ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

É importante destacar que a interpolação inversa é computacionalmente melhor (mais estável) que determinar a raiz de uma aproximação de f.

Além disso, com a interpolação polinomial inversa podemos estimar o erro cometido ao calcular ξ tal que $f(\xi) = \eta$.

Muito grato pela atenção!

MS211 - Cálculo Numérico

Fenômeno de Runge, Nós de Chebyshev, Interpolação por Partes e Splines Cúbicas (Slides Modificados de M. E. Valle)

No problema de interpolação determinamos um polinômio p_n, de grau menor ou igual a n, tal que

$$p_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados.

Se $y_k = f(x_k)$, em que f é uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$E_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \quad \text{com} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Em particular, se $x_0, x_1, \ldots, x_n$ forem igualmente espaçados, então

$$E_n(x) \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)} \quad \text{em que} \quad h = x_{k+1} - x_k.$$

Fenômeno de Runge

Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$.

Perguntas:

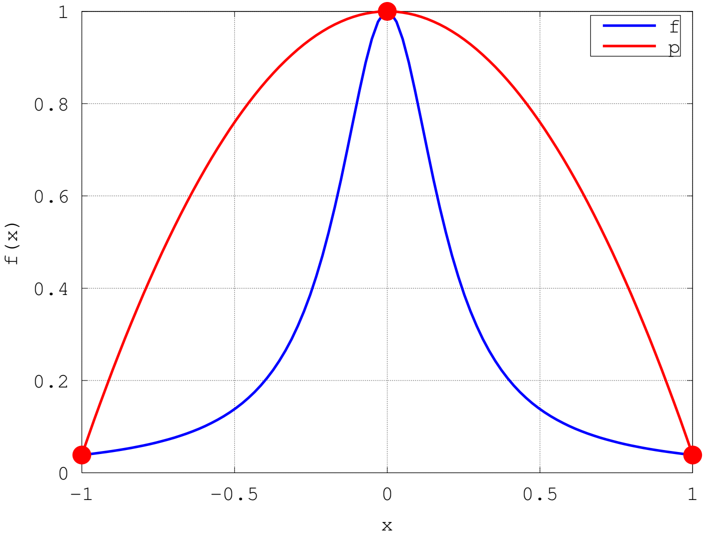
- Será que obtemos aproximações melhores de f aumentando o número n de pontos?
- Em outras palavras, será que p_n converge para f quando $n \to \infty$?

Exemplo 1

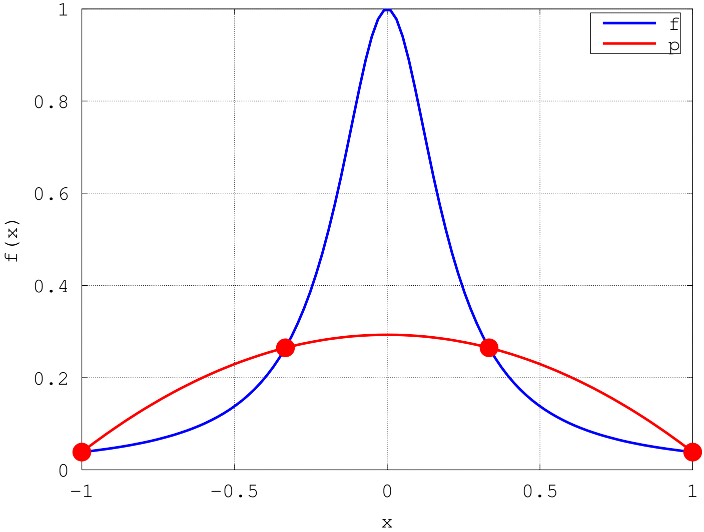
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, +1].$$

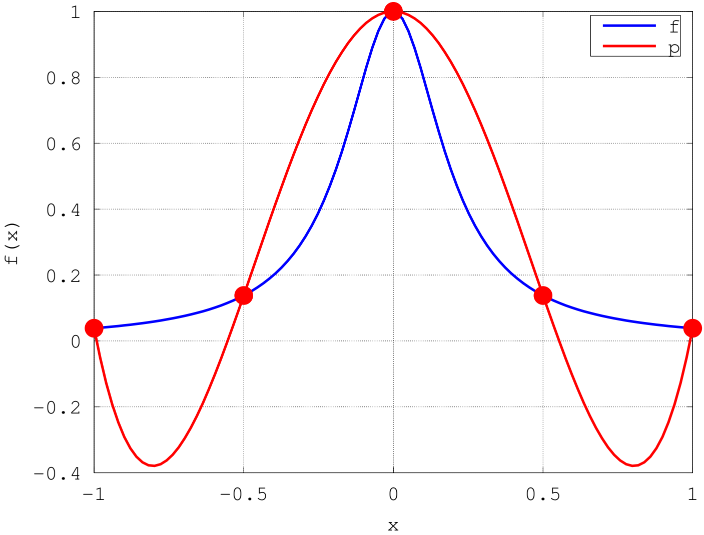
As próximas figuras mostram f e seu polinômio interpolador em nós igualmente espaçados do intervalo $[-1, 1]$.



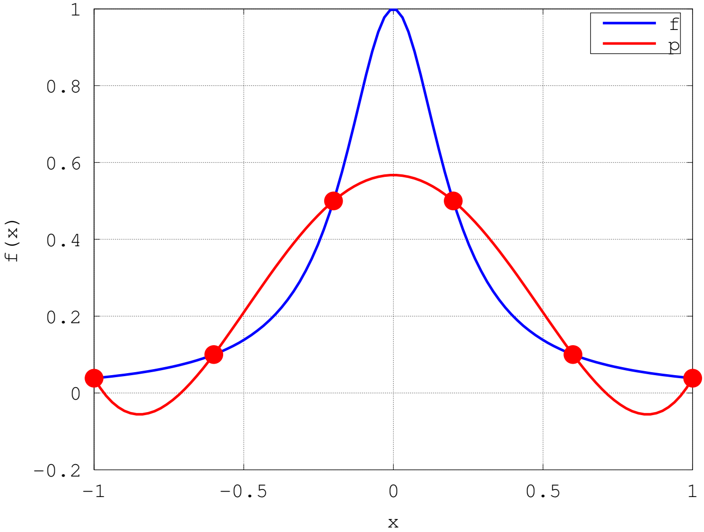
Polinômio de grau 2.



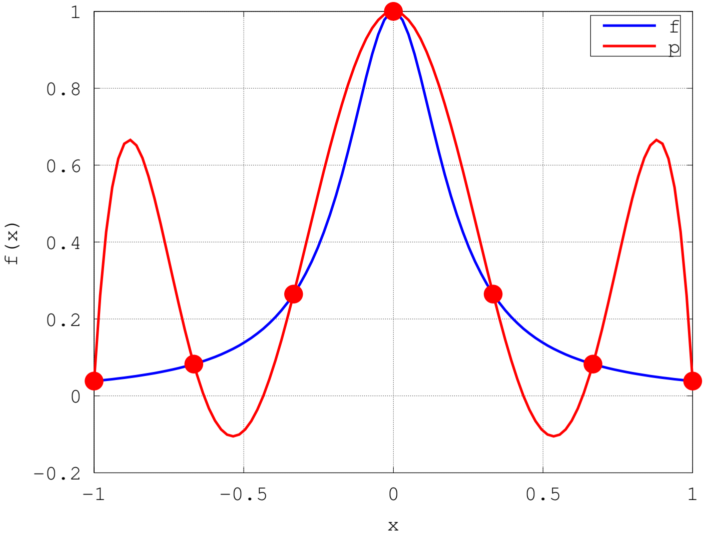
Polinômio de grau 3.



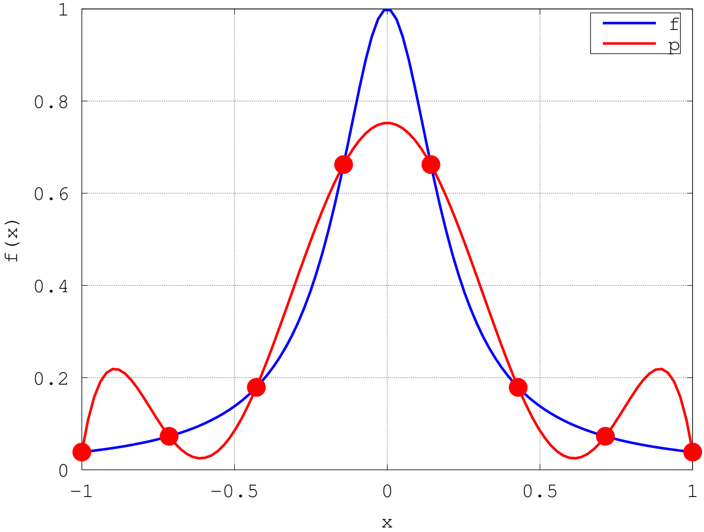
Polinômio de grau 4.



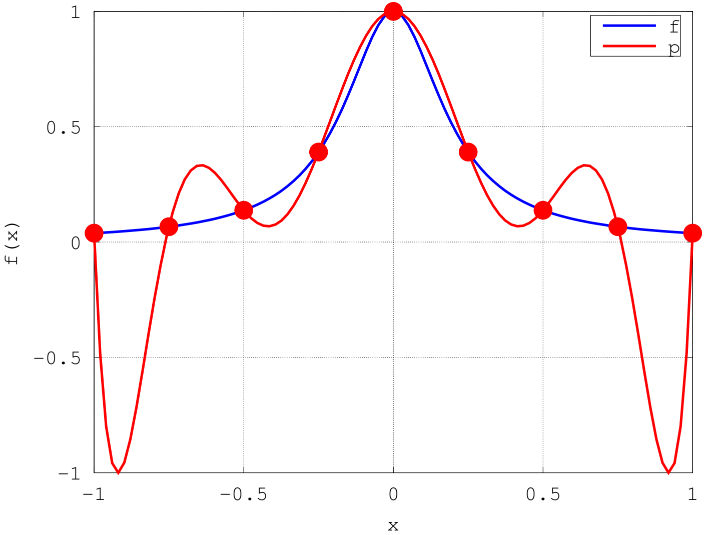
Polinômio de grau 5.



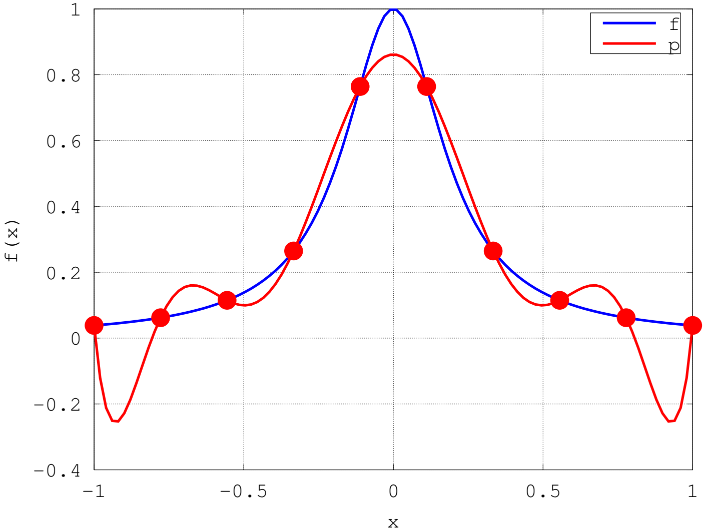
Polinômio de grau 6.



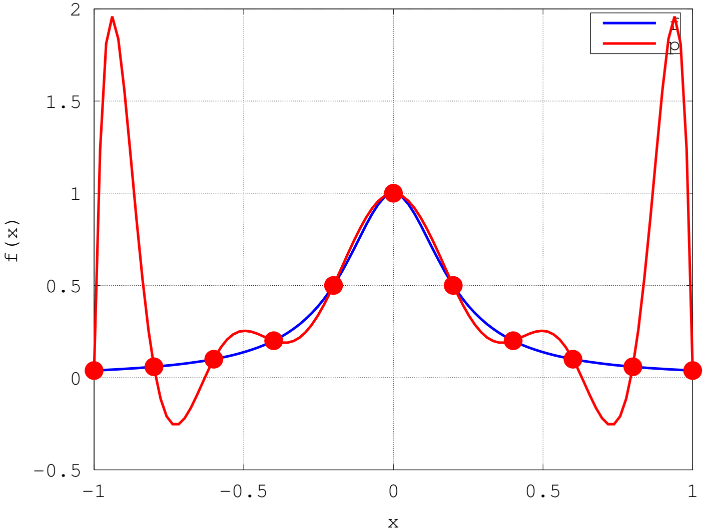
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

O exemplo anterior mostra o chamado **fenômeno de Runge.**

Respondendo as perguntas anteriores, não podemos garantir que $p_n \to f$ quando $n \to \infty$.

Com efeito, pode-se mostrar que

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p_n(x)|,$$

torna-se arbitrariamente grande para certas funções f, incluindo a função do exemplo anterior!

Lembre-se: Essas observações são válidas considerando pontos igualmente espaçados!

Nós de Chebyshev

Podemos obter um polinômio p_n que aproxima melhor f selecionando melhores nós de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Em particular, os nós de Chebyshev dados por

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

distribui o erro homogeneamente no intervalo $[a, b]$.

Alternativamente, pode-se considerar os pontos

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

Interpretação Geométrica dos Nós de Chebyshev

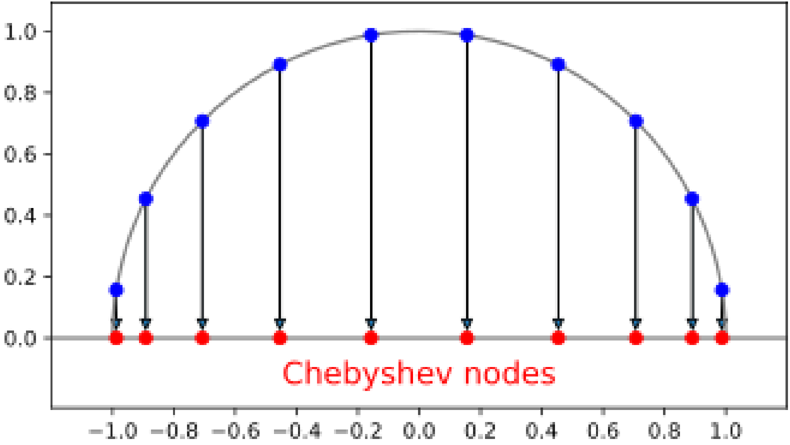
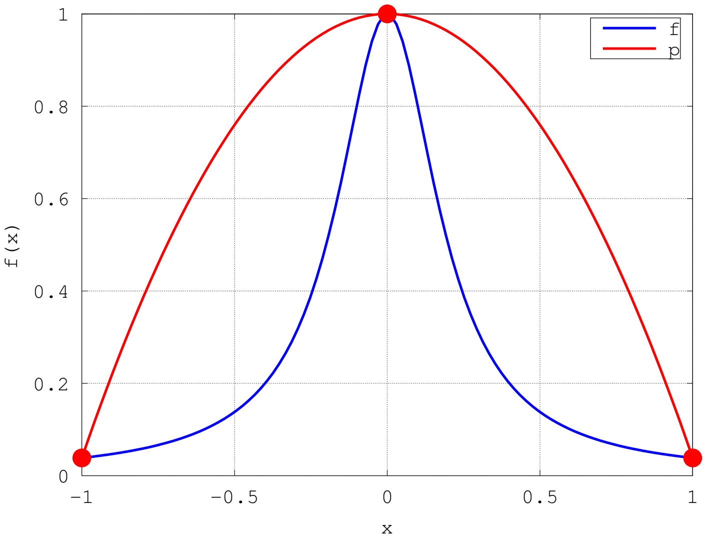


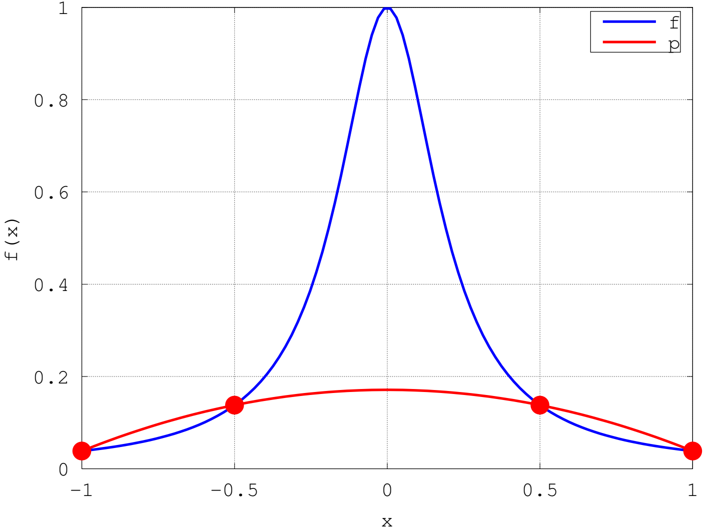
Figura: 10 nós de Chebyshev resultando de projeções de 10 pontos igualmente espaçados num semicírculo (retirado de Wikipedia).

Exemplo 2

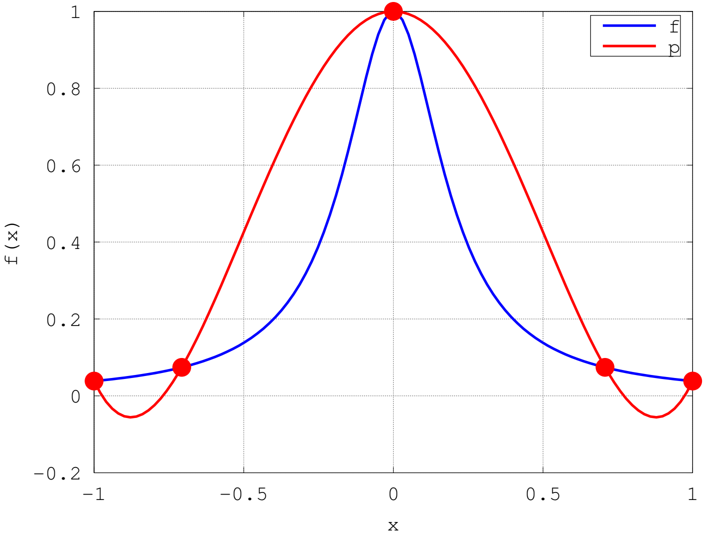
As próximas figuras mostram $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ e seu polinômio interpolador em nós de Chebyshev.



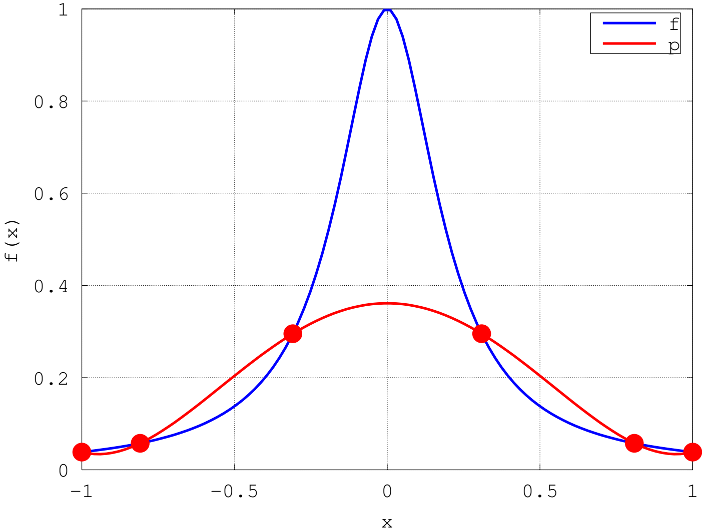
Polinômio de grau 2.



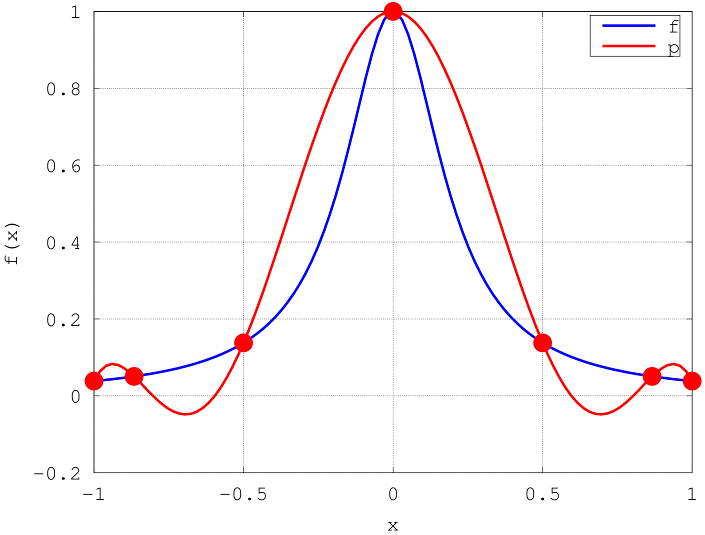
Polinômio de grau 3.



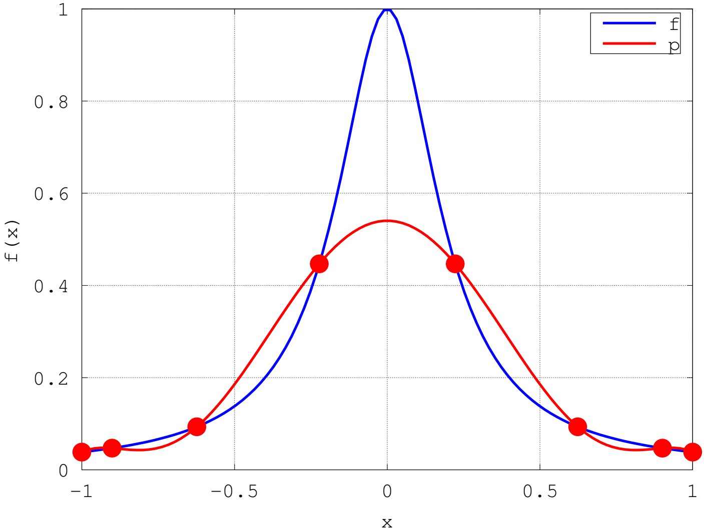
Polinômio de grau 4.



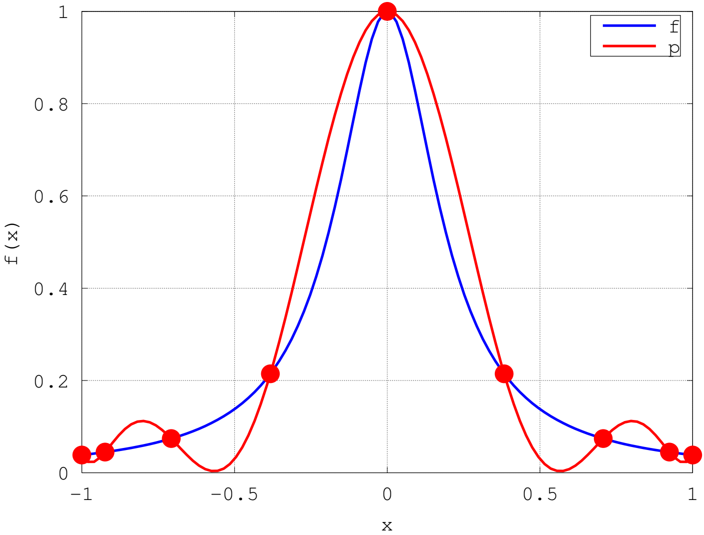
Polinômio de grau 5.



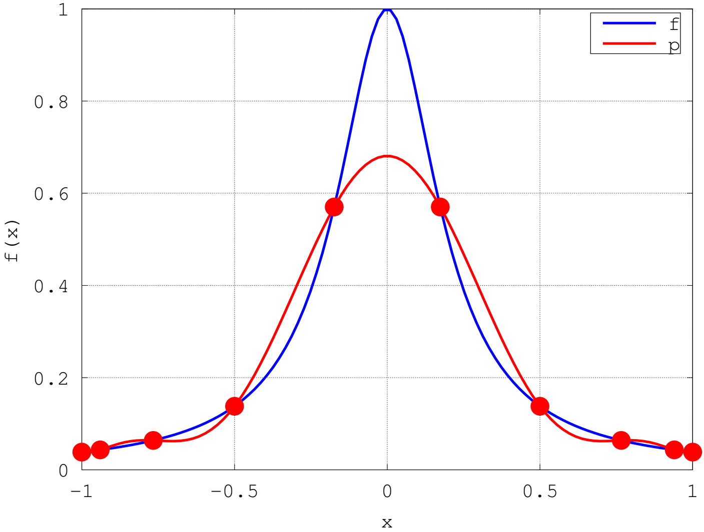
Polinômio de grau 6.



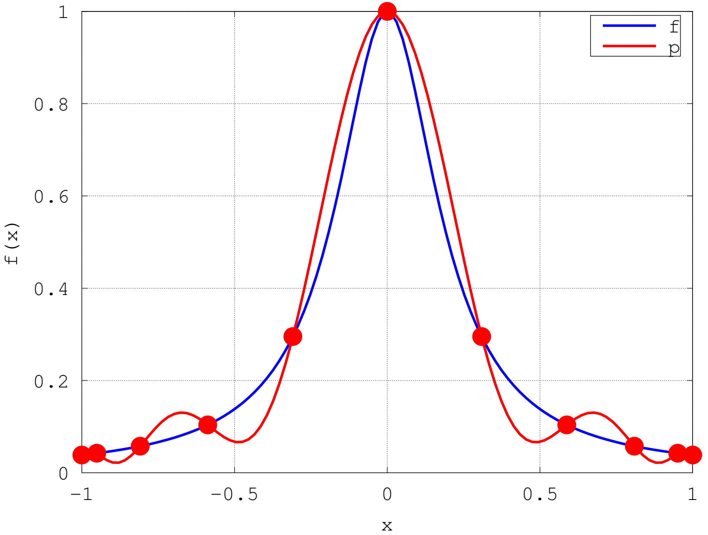
Polinômio de grau 7.



Polinômio de grau 8.



Polinômio de grau 9.



Polinômio de grau 10.

O exemplo anterior mostra que os nós de Chebyshev produzem melhores polinômios interpoladores.

Com efeito, vale o seguinte teorema:

Teorema 3 (Interpolação Polinomial com Nós de Chebyshev)

Seja f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos nós de Chebyshev $x_0, \ldots, x_n$, então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$E_n(x) \leq \frac{(x_n - x_0)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} M_{n+1},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Interpolação por Partes

Em muitas situações práticas, porém, não temos a liberdade para escolher os nós de Chebyshev. Nesse caso, podemos utilizar interpolação por partes:

Definição 4 (Função Polinomial por Partes)

Dado pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, dizemos que Π_m é uma função polinomial por partes se Π_m é contínua em $[x_0, x_n]$ e é um polinômio de grau menor ou igual a m em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, \ldots, n$.

Exemplo 5

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

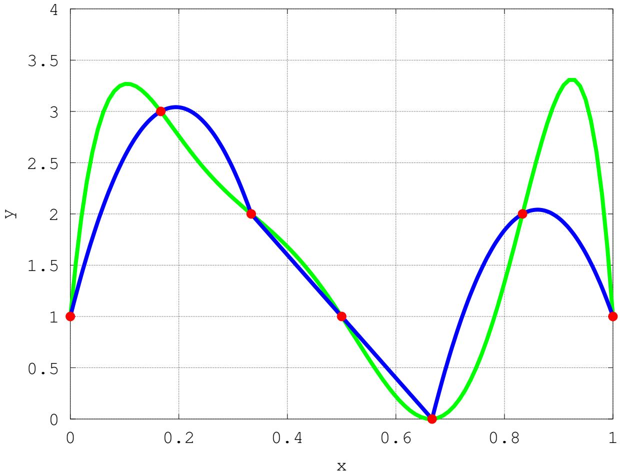
Exemplo 5

Encontre a função polinomial quadrática por partes que interpola a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

Resposta: O polinômio interpolador quadrático por partes é

$$\Pi_2(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ -6x + 4, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ -54x^2 + 93x - 38, & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Polinômio interpolador p_6 (verde) e o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 (azul).

Interpolação Linear por Partes

Dado uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f	y_0	y_1	$\dots$	y_n

o polinômio interpolador linear por partes é dado por

$$\Pi_1(x) = \begin{cases} y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ y_k + \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ \vdots & \\ y_{n-1} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases}$$

Exemplo 6

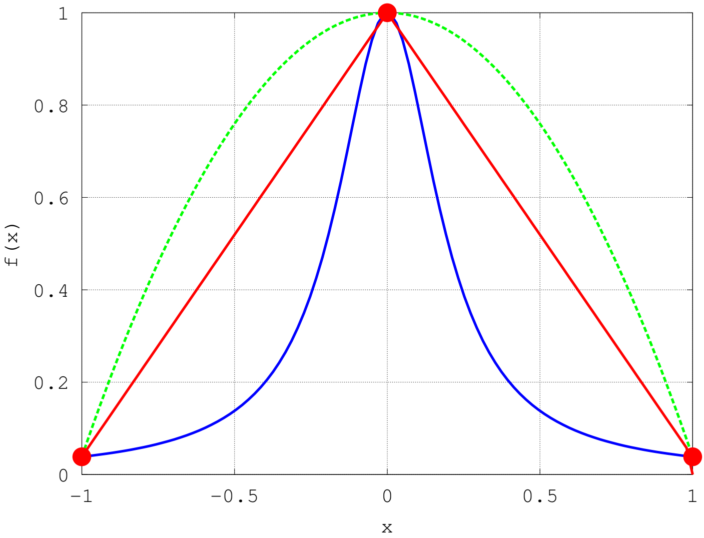
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,+1],$$

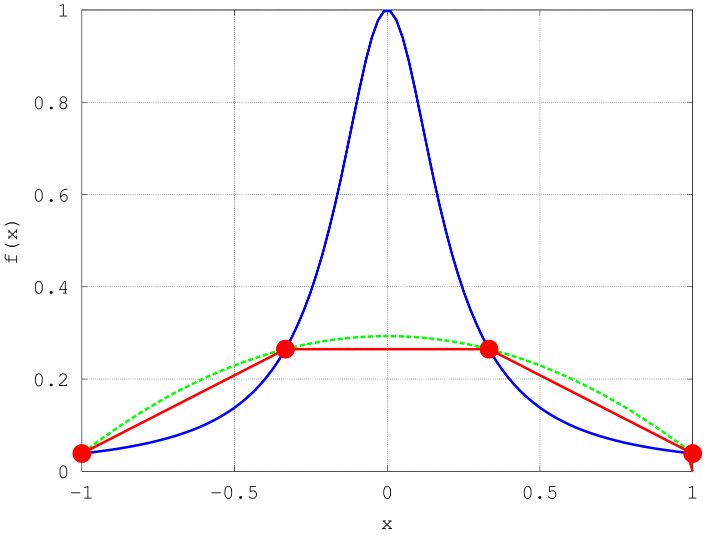
e nós

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

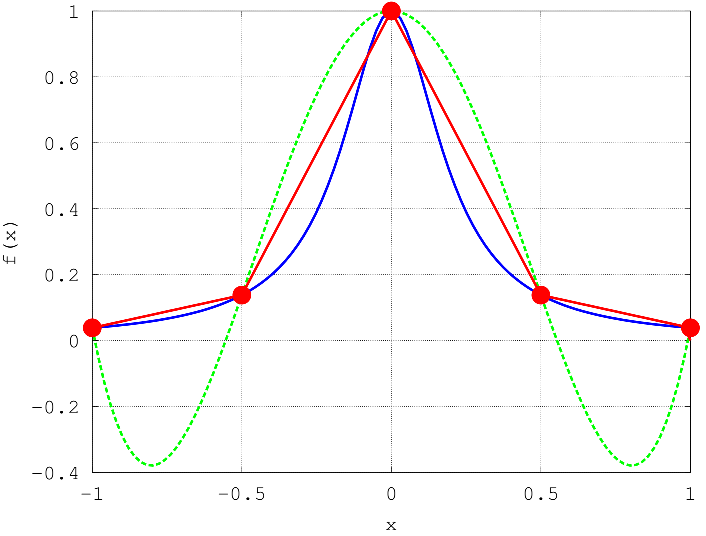
igualmente espaçados no intervalo $[-1,1]$. As próximas figuras mostram f (azul), seu polinômio interpolador (verde) e o polinômio interpolador linear por partes (vermelho).



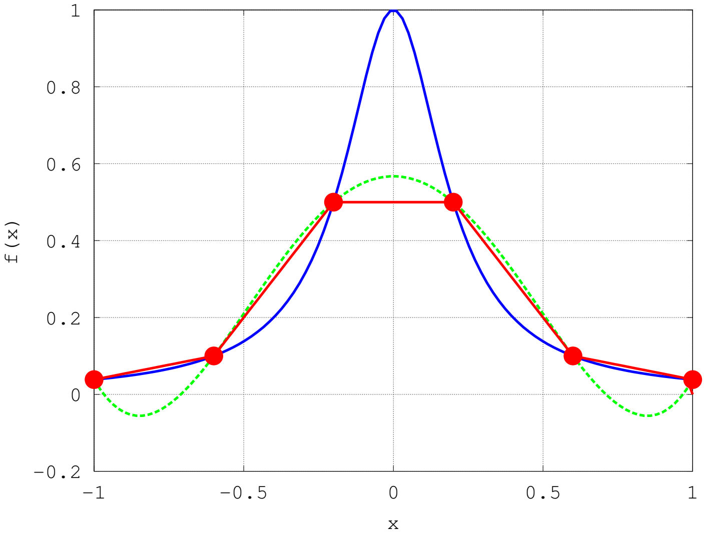
$n = 2.$



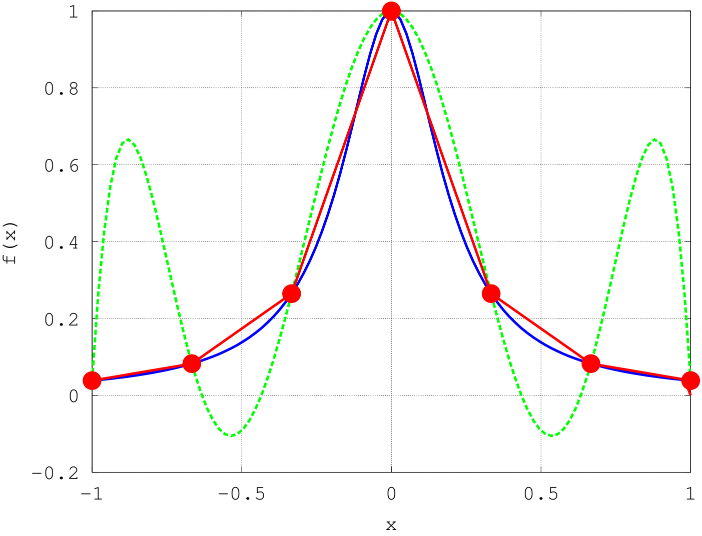
$n = 3.$



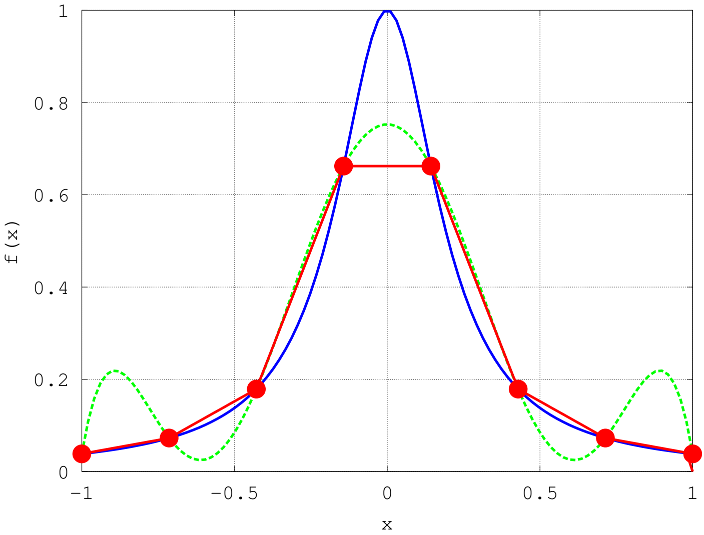
$n = 4.$



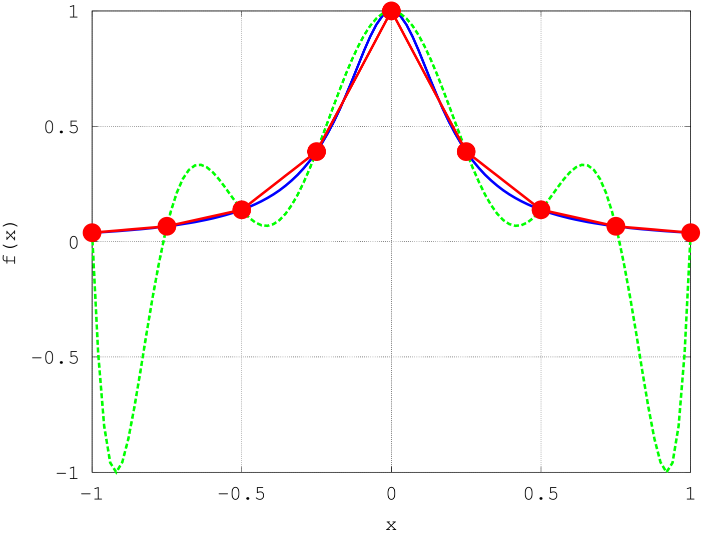
$n = 5.$



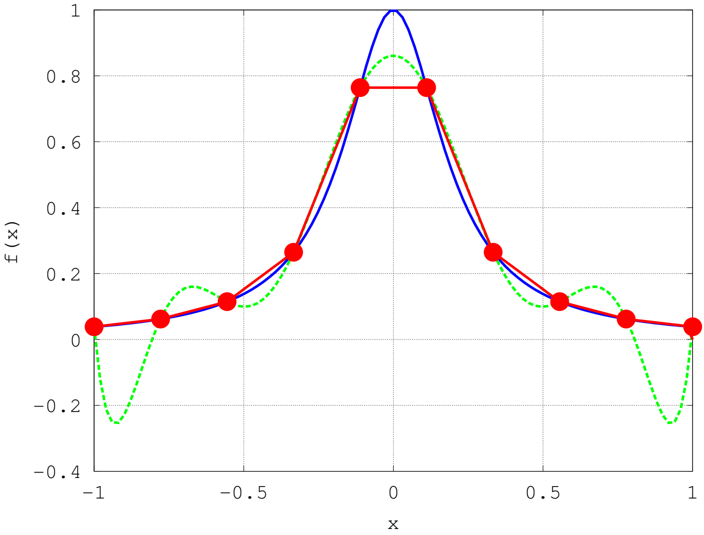
$n = 6.$



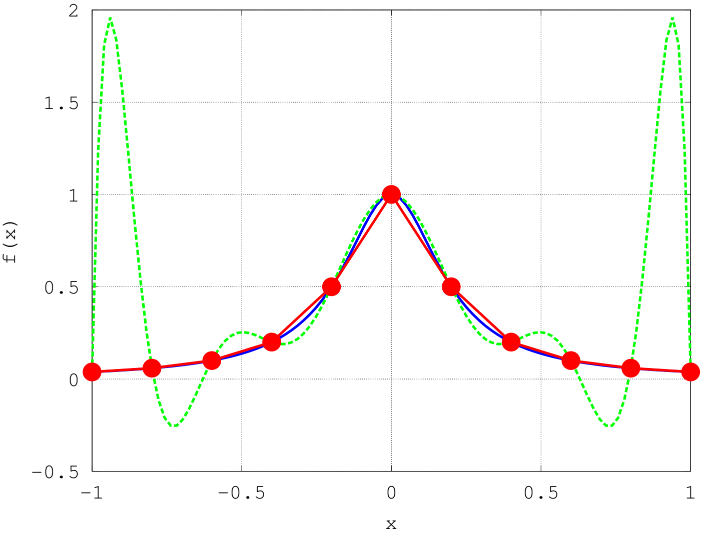
$n = 7.$



$n = 8.$



$n = 9.$



$n = 10.$

No exemplo anterior, os polinômios interpoladores linear por partes produziram resultados melhores que polinômios interpoladores.

Teorema 7 (Erro da Interpolação Linear por Partes)

Considere uma função f com derivada de segunda ordem contínua em $[x_0, x_n]$. Se $y_k = f(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, então o erro da interpolação linear por partes satisfaz

$$E(x) = |f(x) - \Pi_1(x)| \leq \frac{M_2 H^2}{8}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

em que

$$M_2 = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f''(x)| \quad e \quad H = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Note que $\Pi_1 \to f$ quando $H \to 0$ se f é suficientemente suave.

Splines de Grau p

Considere

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Def.: Uma função S_p é chamada spline de grau p que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \dots x_n$

$\Leftrightarrow$

(1) $S_p(x_i) = f(x_i)$

(2) S_p é dado por um poli de grau $\leq p$ em $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

(3) S_p tem derivada contínua até ordem $(p-1)$ em $[x_0, x_n]$

Splines Cúbicas

De um modo geral, se f é suficientemente suave, então o polinômio interpolador por partes $\Pi_m \to f$, mesmo que Π_m não seja suave!

Muitas aplicações, por exemplo em computação gráfica, requerem que a aproximação seja suave, ou seja, possua pelo menos derivada contínua.

Em vista disso, dados nós $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, consideramos polinômios cúbicos por partes $\mathcal{S}_3$ com as seguintes propriedades:

- S_3 é um polinômio de grau menor ou igual à 3 em cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- S_3 tem derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em $[x_0, x_n]$.

Sendo um caso particular de polinômios cúbicos por partes, uma spline cúbica é da forma

$$\mathcal{S}_3(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \vdots & \\ s_k(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

em que

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k,$$

é um polinômio de grau no máximo 3.

Note que uma spline cúbica é determinada por $4n$ parâmetros $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n$.

Como $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_3'$ e $\mathcal{S}_3''$ são contínuas, devemos ter

$$s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k), \quad s_k'(x_k) = s_{k+1}'(x_k) \quad \text{e} \quad s_k''(x_k) = s_{k+1}''(x_k),$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Num problema de interpolação, devemos também ter $\mathcal{S}_3(x_k) = y_k$, ou seja,

$$s_1(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad s_k(x_k) = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Com isso, temos

$$3(n-1) + (n+1) = 4n - 2,$$

equações para determinar $4n$ incógnitas.

Logo, temos duas condições em aberto que podem ser impostas, por exemplo, de acordo com informações físicas sobre o problema.

Spline Cúbica Natural

A **spline cúbica natural** é obtida impondo as condições

$$\mathcal{S}_3''(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_3''(x_n) = 0.$$

Pode-se mostrar que a spline cúbica natural é aquela de menor curvatura.

Manipulando as equações acima, concluímos que uma spline cúbica natural é obtida resolvendo um sistema linear tridiagonal

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

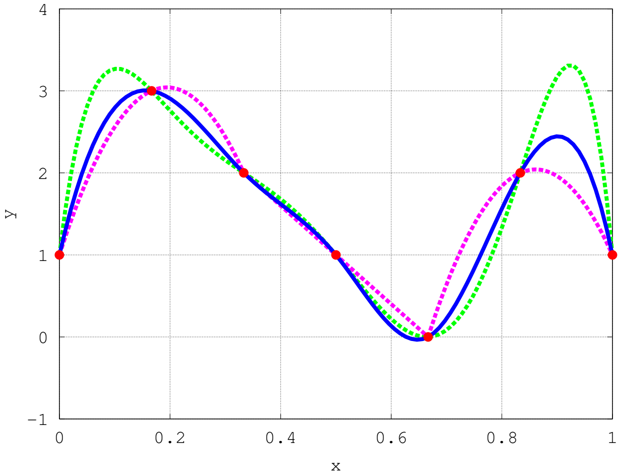
Detalhes sobre a formulação do sistema linear estão no material complementar dessa aula.

Exemplo 8

Considere a tabela

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	3	2	1	0	2	1

A próxima figura mostra o polinômio interpolador de grau p_6 (verde), o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 (magenta) e spline cúbica natural (azul).



Polinômio interpolador de grau p_6 (verde), o polinômio interpolador quadrático por partes Π_2 (magenta) e spline cúbica natural (azul).

Exemplo 9

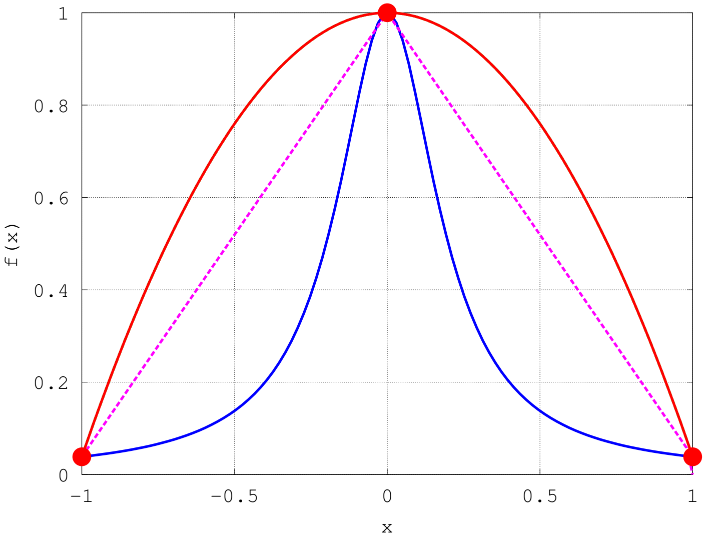
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,+1],$$

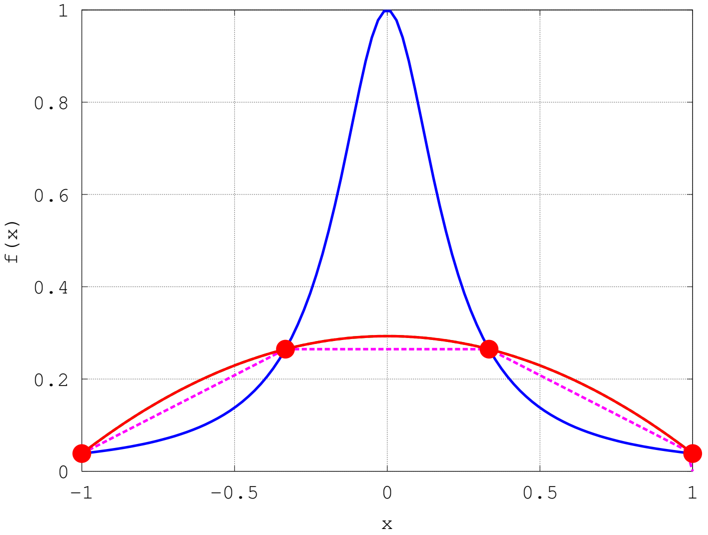
e nós

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k, \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

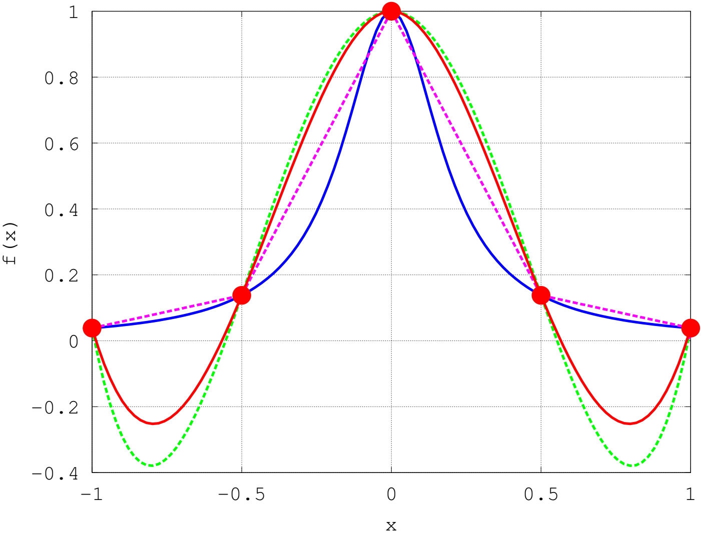
igualmente espaçados no intervalo $[-1,1]$.
As próximas figuras mostram f (azul), seu polinômio interpolador (verde), o polinômio interpolador linear por partes (magenta) e a spline cúbica natural (vermelho).



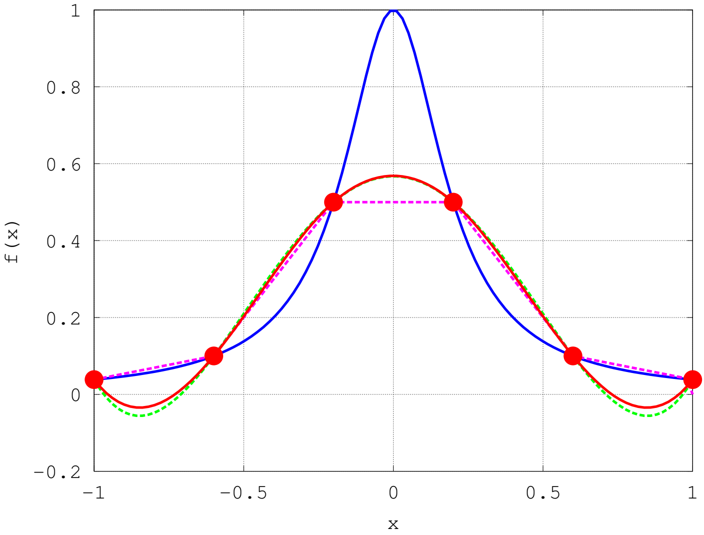
$n = 2.$



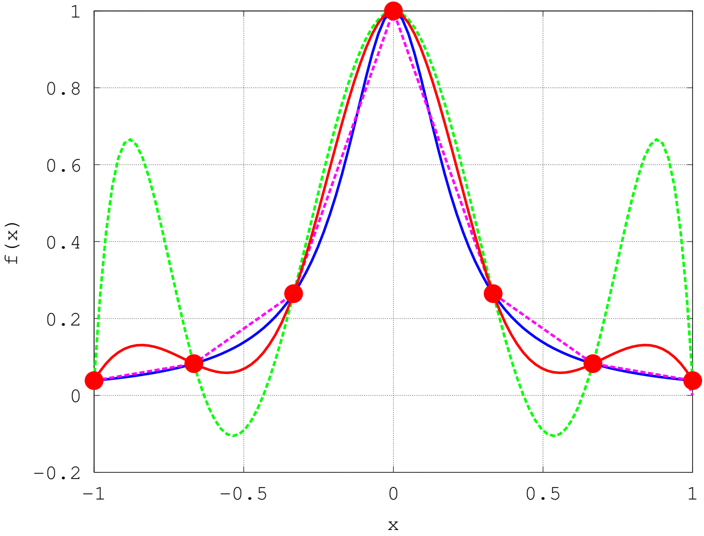
$n = 3.$



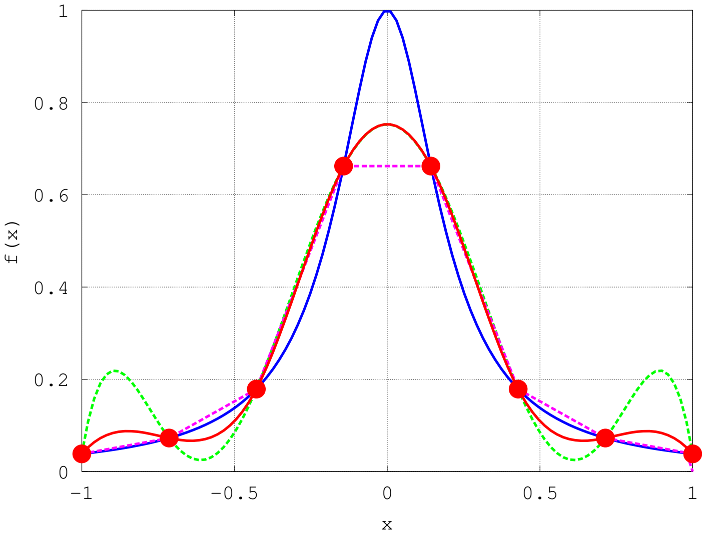
$n = 4.$



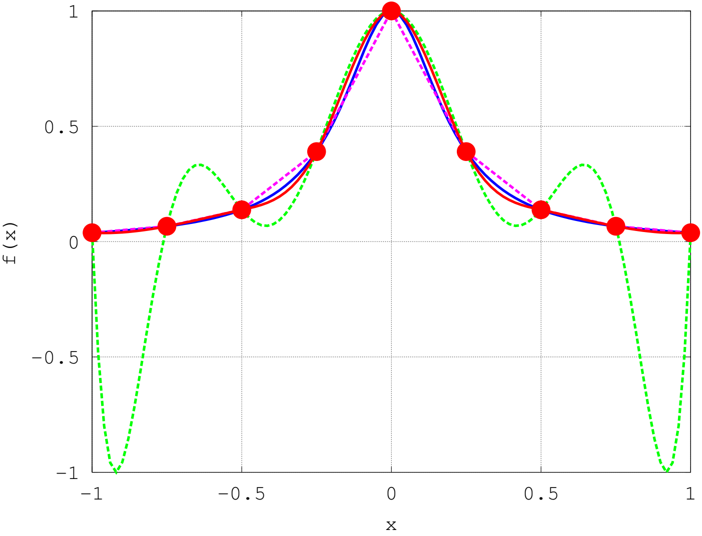
$n = 5.$



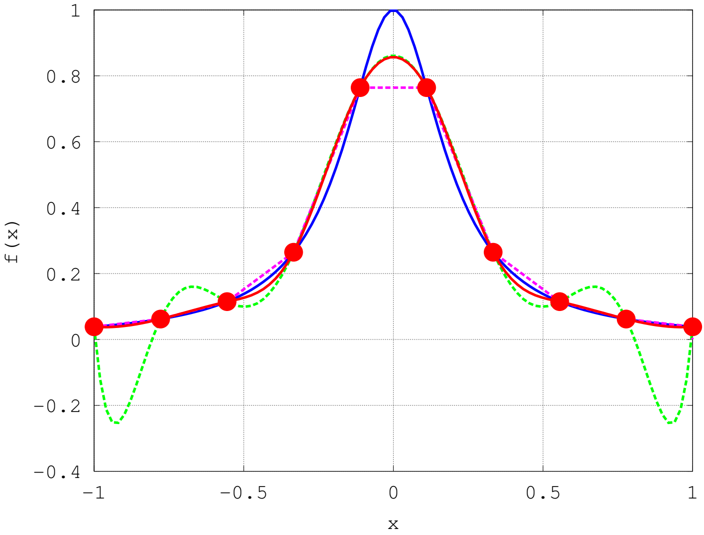
$n = 6.$



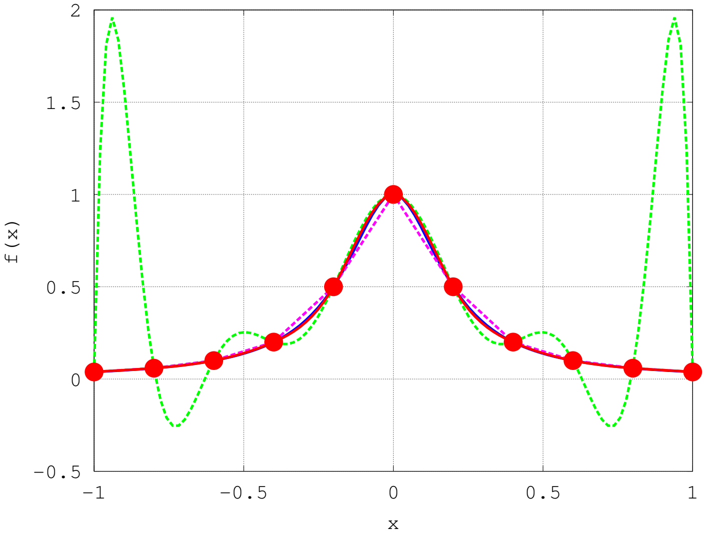
$n = 7.$



$n = 8$.



$n = 9$.



$n = 10.$

Considerações Finais

Iniciamos a aula de hoje comentando sobre o fenômeno de Runge e destacando que não podemos garantir $p_n(x) \to f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \to \infty$.

Apesar dessa observação, podemos obter melhores polinômios interpoladores considerando nós de Chebyshev.

Uma alternativa efetiva para evitar o fenômeno de Runge é considerar interpolação polinomial por partes. Em particular, temos que $\Pi_1(x) \to f(x)$ para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ quando $n \to \infty$.

Finalmente, as splines cúbicas são funções polinomiais por partes que interpolam suavemente um conjunto de pontos.

Muito grato pela atenção!