MS211 - Cálculo Numérico

Análise do Erro na Interpolação Polinomial
(Slides Modificados de M. E. Valle)

Introdução

Na aula anterior, vimos o problema de interpolação que consiste em determinar uma função φ tal que

$$\varphi(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são dados. Vimos três formas para a interpolação polinomial:

1. **Forma de Vandermonde** – que apesar da simplicidade teórica, é computacionalmente caro além de ser numericamente instável.
2. **Forma de Lagrange** – que é rica do ponto de vista teórico mas também é computacionalmente cara.
3. **Forma de Newton**, em conjunto com os **parênteses encaixados**, é o forma computacionalmente mais eficiente para determinar o polinômio interpolador.

Definição do Erro de Interpolação

Na aula de hoje, vamos fazer uma análise do erro (supondo aritmética exata) na interpolação polinomial.

Formalmente, vamos assumir os pontos tabelados $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ são tais que

$$y_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

em que f é a função que iremos aproximar por um polinômio interpolador p_n de grau menor ou igual à n.

O erro E_n da interpolação polinomial em $x \in [x_0, x_n]$ é

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Teorema sobre o Erro na Interpolação Polinomial

Teorema 1

Seja f $n+1$ vezes continuamente derivavel em $[a,b]$.

Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Então

$$f(x) = \underbrace{f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n]}_{p_n(x)} + \underbrace{\boxed{(x-x_0)\dots(x-x_n)f[x_0,\dots,x_n,x]}}_{E_n(x)}$$

$p_n(x)$ é o polinómio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Corolário 1 (Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, com $n \geqslant 0$. Seja f uma função com derivadas até ordem $n+1$ contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$. Se p_n é o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$, então

$$f(x) - p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [x_0, x_n],$$

para algum $\xi_x \in [x_0, x_n]$.

Interpolação $\times$ Aproximação de Taylor

O polinômio de Taylor de f em torno x_0 é

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n.$$

$$\text{e} \quad f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algum ξ_x entre x e x_0. Note que essa aproximação de Taylor é obtida considerando as derivadas de f apenas no ponto x_0.

Na interpolação polinomial, $f(x) - p_n$ é dado por

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

para algum $\xi_x \in [x_0, x_n]$.

Corolário 2 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ *pontos* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ *e* f *uma função com derivadas até ordem* $n+1$ *contínuas no intervalo* $[x_0, x_n]$*. Se* p_n *é o polinômio que interpola* f *nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$*, então o erro da interpolação polinomial satisfaz*

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Demonstração do Corolário 2

Sendo $f^{(n+1)}$ contínua em $[x_0, x_n]$, $|f^{(n+1)}|$ admite um valor máximo M_{n+1}. Consequentemente, pelo Corolário 1, tem-se

$$|E(x)| = \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|,$$

pois $|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant M_{n+1}$.

Corolário 3 (Majorante do Erro da Interpolação Polinomial)

Considere $n+1$ *pontos igualmente espaçados*

$$x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

e f *uma função com derivadas até ordem* $n+1$ *contínuas no intervalo* $[x_0, x_n]$. *Se* p_n *é o polinômio que interpola* f *nos pontos* $x_0, \ldots, x_n$, *então o erro da interpolação polinomial satisfaz*

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Exemplo 4

Suponha que desejamos obter $\ln(3.7)$ conhecendo a tabela:

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Apresente a aproximação para $\ln(3.7)$ e uma estimativa para o seu erro usando interpolação linear.

Resposta: Tomando $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, obtemos

$$p_1(x) = 1.0986 + 0.2877(x - 3).$$

Desse modo, $p_1(3.7) = 1.3000$, enquanto $\ln(3.7) = 1.3083$.
O erro da interpolação polinomial é

$$|E_1(x)| = |\ln(3.7) - p_1(3.7)| = 0.0083.$$

Pelos Corolários 2 e 3, temos

$$M_2 = \max_{x \in [3,4]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{9}.$$

Logo, encontramos respectivamente as estimativas

$$|E_1(x)| \leqslant \frac{(1/9)}{2!} |(3.7 - 3)(3.7 - 4)| = 0.011667,$$

e

$$|E_1(x)| \leqslant \frac{(1/9)1^2}{4(2)} = 0.013889.$$

Estimativa para o Erro de Interpolação Polinomial

Se temos apenas uma tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_m
y	y_0	y_1	$\dots$	y_m

sendo $m > n$, um limitante superior para $|E_n(x)|$ pode ser estimado aproximando $M_{n+1}/(n+1)!$ pelo maior valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n+1$, ou seja,

$$\prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \begin{pmatrix} \text{máximo do valor absoluto das} \\ \text{diferenças divididas de ordem } n+1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Considere a tabela

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
y	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Aproxime $f(0.47)$ usando um polinômio de grau 2.

(b) Forneça uma estimativa para o erro de interpolação.

Resposta: Construímos a tabela com as diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.43		
0.34	0.22		2.02	
		0.83		-17.9
0.4	0.27		-3.7	
		0.17		18.2
0.52	0.29		1.04	
		0.38		-2.6
0.6	0.32		0.21	
		0.42		
0.72	0.37			

(a) Escolhendo $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.52$ e $x_2 = 0.6$, encontramos

$$p_2(x) = 0.27 + 0.17(x - 0.4) + 1.04(x - 0.4)(x - 0.52).$$

Logo, $f(0.47) \approx p_2(0.47) = 0.28$.

(b) Um limitante superior para $|E_2(0.47)|$ é aproximadamente

$$|(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)18.2| = 8.28 \times 10^{-3}.$$

Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

A tabela das diferenças divididas pode auxiliar na escolha do grau do polinômio interpolador:

Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

O polinômio de grau n aproximará bem a função se as diferenças divididas de ordem n são praticamente constantes ou se as de ordem $n+1$ são próximas de zero.

Exemplo 6

Considere a função $f(x)$ cuja tabela das diferenças dividas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		-0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Dessa forma, podemos dizer que um polinômio de grau 1 fornece uma boa aproximação para $f(x)$ em $[1, 1.05]$.

Consideraçõs Finais

Na aula de hoje apresentamos uma fórmula para o erro da interpolação polinomial que depende da derivada $f^{(n+1)}$ da função que estamos aproximando.

Apresentamos também majorantes para o erro de interpolação.

Vimos que as diferenças divididas podem ser usadas para estimar o erro quando temos apenas uma tabela de pontos (e não conhecemos a função).

O polinômio interpolador de grau k aproximará bem a função se as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes ou se aquelas de ordem $k+1$ são próximas de 0.

Muito grato pela atenção!