MS211 - Cálculo Numérico

Sistemas Lineares
(Slides Modificados de M. E. Valle)

Aplicação 1 - Modelo de Leontief

Wassily Leontief recebeu o prêmio Nobel em Economia em 1973 por apresentar um modelo matemático que descreve as relações inter-indústria numa economia.

A produção de um setor industrial pode se tornar um insumo para outro setor industrial.

Suponha que a economia de um país ou região pode ser dividida em n setores que produzem ou oferecem n produtos diferentes.

Vamos admitir que um setor depende do produto dos outros setores e, possivelmente, do seu próprio setor.

Suposições de Leontief

O setor i produz x_i unidades (monetárias) de um único bem.

O j-ésimo setor, para produzir 1 unidade, deve usar a_{ij} unidades (monetárias) do setor i.

Cada setor venda parte de sua produção para outros setores (produção intermediária) e parte de sua produção para os consumidores (produção final ou demanda final).

Dado qualquer vetor de demanda final d, as produções necessárias podem ser encontradas através da resolução de um sistema linear.

As equações de Leontief

$$\begin{cases} x_1 & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + d_1, \\ x_2 & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + d_2, \\ & \vdots \\ x_n & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + d_n. \end{cases}$$

Equivalentemente, temos o seguinte sistema com n equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n & = d_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n & = d_2, \\ & \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n & = d_n. \end{cases}$$

Exemplo Artificial Simples

Suponha que a economia de um país possa ser dividida em:

1. Agricultura (S_1) – Café, laranja, cana-de-açúcar, milho, etc.
2. Pecuária (S_2) – Carne bovina, carne de frango e carne suína.
3. Industria (S_3) – Veículos, combustíveis, alimentos, bebidas, etc.
4. Serviços (S_4) – Telecomunicações, transporte, técnico, etc.

Veja a seguinte tabela de produção, consumo e demanda:

	Agricultura	Pecuária	Industria	Serviços	Demanda
S_1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.5
S_2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.4
S_3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3
S_4	0.2	0.2	0.4	0.2	0

Nesse caso, teremos o sistema linear:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, & (L_1^{(0)}) \\ -0.2x_1 & +0.9x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.4, & (L_2^{(0)}) \\ -0.3x_1 & -0.3x_2 & +0.8x_3 & -0.2x_4 & = 0.3, & (L_3^{(0)}) \\ -0.2x_1 & -0.2x_2 & -0.4x_3 & +0.8x_4 & = 0, & (L_4^{(0)}) \end{cases}$$

em que x_1, x_2, x_3, e x_4 denotam a produção dos setores S_1, S_2, S_3 e S_4, respectivamente.

Podemos resolver o sistema adicionando/subtraindo de uma linha um múltiplo de outra linha.

Existem várias formas de fazer isso. Descreveremos a seguir o chamado **método da eliminação de Gauss**.

Método da Eliminação de Gauss

Primeiro, adicionamos a segunda, terceira e quarta equações, múltiplos da primeira equação:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, & \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, & (L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} + \frac{0.2}{0.8}L_1^{(0)}) \\ & -0.38x_2 & 0.73x_3 & -0.31x_4 & = 0.49, & (L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} + \frac{0.3}{0.8}L_1^{(0)}) \\ & -0.25x_2 & -0.45x_3 & +0.73x_4 & = 0.12, & (L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(0)} + \frac{0.2}{0.8}L_1^{(0)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_1 da segunda, terceira e quarta equações.

Posteriormente, adicionamos a terceira e quarta equações, múltiplos da segunda equação:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, \\ & & 0.61x_3 & -0.48x_4 & = 0.72, & (L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + \frac{0.38}{0.85}L_2^{(1)}) \\ & & -0.52x_3 & +0.61x_4 & = 0.28, & (L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} + \frac{0.25}{0.85}L_2^{(1)}) \end{cases}$$

Os múltiplos são escolhidos de modo a *eliminar* o termo x_2 da terceira e quarta equações.

No terceiro estágio do método da eliminação de Gauss, adicionamos a quarta equação um múltiplo da terceira:

$$\begin{cases} 0.8x_1 & -0.2x_2 & -0.2x_3 & -0.3x_4 & = 0.5, \\ & +0.85x_2 & -0.25x_3 & -0.38x_4 & = 0.53, \\ & & 0.61x_3 & -0.48x_4 & = 0.72, \\ & & & +0.21x_4 & = 0.89, \quad (L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} + \frac{0.52}{0.61} L_3^{(2)}) \end{cases}$$

O múltiplo é escolhido de modo a *eliminar* o termo x_3 da quarta equação.

Finalmente, determinamos a solução do sistema linear usando a chamada **substituição reversa.**

Especificamente, da quarta equação, concluímos que

$$x_4 = \frac{0.89}{0.21} = 4.24.$$

Substituindo o valor de x_4 na terceira equação, obtemos:

$$x_3 = \frac{0.72 + 0.48x_4}{0.61} = \frac{0.72 + 0.48 \times 4.21}{0.61} = 4.51.$$

Analogamente, obtemos

$$x_2 = \frac{0.53 + 0.25x_3 + 0.38x_4}{0.85} = 3.84,$$

e

$$x_1 = \frac{0.5 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4}{0.8} = 4.32.$$

Concluindo, para atender tanto a demanda interna como a demanda externa, os setores S_1, S_2, S_3 e S_4 devem produzir respectivamente 4.32, 3.84, 4.51 e 4.29.

Nesse exemplo, admitimos que a economia é dividida em 4 setores.

A economia brasileira pode ser dividida em mais de 50 setores.

Vamos ver na aula como resolver de forma eficiente um sistema linear com um número significativo de equações e incógnitas.

Não encontrei dados que permitem gerar a matriz de Leontief na literatura, ao contrário de dados provenientes de um certo país europeu.

Exemplo com Dados Reais

Table 1

Aggregated Sectoral Structure

Sector Code	Sector Name	Branch codes (of the classification based on 105 branches) included in the respective sector
1	Agriculture, forestry, hunting and fishing	1…6
2	Mining and quarrying	7,9,11…17
3	Production and distribution of electric and thermal power	79…82
4	Food, beverages and tobacco	18…27
5	Textiles, leather, pulp and paper, furniture	28...33, 77
6	Machinery and equipment, transport means, other metal products	60…65, 67…76
7	Other manufacturing industries	34,35,8,36,38…59, 78
8	Constructions	83
9	Transports, post and telecommunications	87…91, 93…95
10	Trade, business and public services	84…86, 96…105

Figura: Setores da economia de um certo país.

Matriz de Leontief com Dados Reais

Technical Coefficients Matrix (A)

Sector Code	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.433	0.002	0.000	0.209	0.058	0.000	0.001	0.001	0.000	0.009
2	0.000	0.302	0.239	0.001	0.000	0.009	0.087	0.007	0.000	0.006
3	0.017	0.087	0.208	0.044	0.034	0.036	0.073	0.015	0.034	0.034
4	0.042	0.001	0.003	0.358	0.012	0.003	0.007	0.003	0.007	0.095
5	0.012	0.006	0.002	0.035	0.242	0.017	0.025	0.038	0.008	0.063
6	0.053	0.075	0.023	0.024	0.034	0.242	0.046	0.047	0.086	0.059
7	0.124	0.091	0.270	0.066	0.098	0.189	0.410	0.159	0.077	0.131
8	0.006	0.006	0.004	0.004	0.005	0.003	0.003	0.153	0.006	0.016
9	0.010	0.031	0.007	0.025	0.025	0.025	0.023	0.006	0.077	0.039
10	0.033	0.069	0.041	0.064	0.091	0.068	0.055	0.124	0.152	0.199

Source: Authors' own computations.

Figura: A matriz A que determine as dependências entre os setores de um certo país e um certo ano.

Considerações Finais

Na aula de hoje, primeiramente, comentamos que nesse curso veremos como a matemática e o computador são usadas para resolver problemas da ciência e da engenharia.

Como exemplo, presentamos o modelo econômico de Leontief que pode ser formulada como um sistema linear.

Usando um exemplo pequeno, apresentamos o método da eliminação de Gauss.

Na próxima aula, formalizaremos o método da eliminação de Gauss.

Muito grato pela atenção!