MS211 - Cálculo Numérico

Pivoteamento Parcial na Eliminação de Gauss e Fatoração LU (Slides Modificados de M. E. Valle)

Na aula anterior, apresentamos o método da eliminação de Gauss e, equivalentemente, a fatoração LU.

Na eliminação de Gauss, operações elementares são usadas para transformar um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ num sistema equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior.

Organizando os multiplicadores usados na eliminação de Gauss, obtemos uma matriz $\mathbf{L}$ triangular inferior com diagonal unitária tal que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, chamada **fatoração LU** de $\mathbf{A}$.

Tanto a eliminação de Gauss como a fatoração LU requerem $\mathcal{O}(n^3)$ operações, em que n é a dimensão do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Na eliminação de Gauss/fatoração LU podem surgir problemas que podem ser evitados ou amenizados usando técnica de **pivoteamento parcial**.

Falha na Eliminação de Gauss/Fatoração LU

No método da eliminação de Gauss/fatoração LU, inicialmente escrevemos $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$.

No j-ésimo, definimos

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - m_{ij} b_j^{(j-1)} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_i^{(j)} = \mathbf{a}_i^{(j-1)} - m_{ij} \mathbf{a}_j^{(j-1)},$$

para $i = j+1, \ldots, n$.

O multiplicador m_{ij}, que será um elemento da matriz $\mathbf{L}$ da fatoração LU, requer uma divisão por $a_{jj}^{(j-1)}$, chamado **pivô**.

O método irá falhar se em algum estágio o pivô é nulo, ou seja, se $a_{jj}^{(j-1)} = 0$!

Exemplo 1

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A (única) solução do sistema é $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Porém, não é possível determina-la usando o método da eliminação de Gauss. De fato, no primeiro estágio deveríamos calcular

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}},$$

mas o denominador é zero! Logo, o método da eliminação de Gauss falha.

O ponto positivo é que temos então um diagnóstico claro do problema: uma divisão por zero!

Um Outro Exemplo Problemático

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

em $F(10, 3, [-20, 20])$ com arredondamento.

Um Outro Exemplo Problemático

Exemplo 2

Use o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

em $F(10, 3, [-20, 20])$ com arredondamento.

Resposta: Note que

$$[\mathbf{A}^{(0)} | \mathbf{b}^{(0)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{array}\right]$$

Um Outro Exemplo Problemático

Exemplo 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Um Outro Exemplo Problemático

Exemplo 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 10^{-5} & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Resposta: Fazendo as contas em $F(10, 3, [-20, 20])$ obtemos $m_{21} = 0.100 \cdot 10^6 = 10^5$

$$[\mathbf{A}^{(1)} | \mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.100 \cdot 10^{-5} & 0.100 \cdot 10^{0} & 0.300 \cdot 10^{0} \\ 0.000 \cdot 10^{-20} & -0.100 \cdot 10^{5} & -0.300 \cdot 10^{5} \end{array}\right]$$

Desta maneira, $\bar{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} 0.000 \cdot 10^{-20} \\ 0.300 \cdot 10^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Porém,

$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^* = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, quer dizer, longe de **b**. Use pivoteamento parcial!

Pivoteamento Parcial

Pivoteamento parcial

Na estratégia de pivoteamento parcial, antes de iniciar o j-ésimo estágio, permutam-se linhas da matriz $\mathbf{A}^{(j-1)}$ de modo a obter

$$|a_{jj}^{(j-1)}| \geqslant |a_{ij}^{(j-1)}|, \quad \forall i = j, \ldots, n.$$

Em palavras, o pivô é escolhido como sendo um dos elementos de maior valor absoluto dentre

$$a_{jj}^{(j-1)}, a_{j+1,j}^{(j-1)}, \ldots, a_{nj}^{(j-1)}.$$

Vejamos incluir a técnica de pivoteamento parcial no método da elimin̨ção de Gauss.

Algoritmo da Eliminação de Gauss (sem pivoteamento parcial)

Entrada: Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

para $j = 1$ *até* $n - 1$ **faça**

  para $i = j + 1$ *até* n **faça**

  - $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
  - $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.

    para $k = j + 1$ *até* n **faça**

    - $a_{ik} = a_{ik} - m_{ij} a_{jk}$

    fim

  fim

fim

Saída: Matriz triangular superior **A** e **b**.

Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Entrada: Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

para $j = 1 : n - 1$ **faça**

- Determine k tal que $|a_{kj}| = \max_{i=j:n} |a_{ij}|$. (índice do pivô)
- Permute as linas j e k.

  para $i = j + 1$ *até* n **faça**

  - $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
  - $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.

    para $k = j + 1$ *até* n **faça**

    - $a_{ik} = a_{ik} - m_{ij} a_{jk}$

    fim

  fim

fim

Saída: Matriz triangular superior $\mathbf{A}$ e um novo vetor $\mathbf{b}$.

Exemplo 4

Exemplo

Resolve $A \cdot x = b$

onde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utilizando El. de Gauss com pivoteamento parcial

$$\bar{A} = [A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 := L_3 - \frac{1}{3}L_1]{L_2 := L_2 - \frac{2}{3}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Exemplo 4 cont.

$$L_3 := L_3 - \frac{1}{2} L_2 \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\frac{2}{3} x_2 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow 2x_2 = 18 \Rightarrow x_2 = 9$$

$$3x_1 + 36 - 1 = 2 \Rightarrow 3x_1 = -33 \Rightarrow x_1 = -11$$

$$x = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resposta: Considerando a matriz aumentada $\bar{\mathbf{A}}$, permutamos a primeira com a terceira linha:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zeros abaixo do pivô:

$$m_{21} = 1/2, \quad m_{31} = 1/4 \quad \text{e} \quad m_{41} = 3/4.$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 & 0 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 & 2 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Permutar a quarta linha com a segunda:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 & 2 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -5/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zeros abaixo do pivô:

$$m_{32} = -3/7 \quad \text{e} \quad m_{42} = -2/7.$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 & 2 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 & 4/7 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Permutar a quarta linha com a terceira:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 & 2 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -2/7 & 4/7 & 6/7 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Introduzir zero abaixo do pivô:

$$m_{43} = 1/3.$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 7 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 & 2 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Exemplo 5

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para determinar a solução do sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Utilizando substituição reversa, podemos verificar que a solução do sistema é:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Fatoração LU com Pivoteamento Parcial

Os multiplicadores determinados no método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial podem ser organizados, com cuidado devido as permutações das linhas, numa matriz **L** triangular inferior com diagonal unitária.

Sobretudo, a matriz original **A**, a matriz triangular superior **U** obtida no final do processo de eliminação e a matriz **L** triangular inferior com os multiplicadores satisfazem:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

em que **P** é a matriz de permutação (obtida permutando linhas da matriz identidade).

Exemplo 6

Exemplo:

Fatoração LU com pivoteamento de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)'} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 6 cont.

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = L \cdot U$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 7

Determine a fatoração LU, com pivoteamento parcial, da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7

Determine a fatoração LU, com pivoteamento parcial, da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resposta: A fatoração LU de **A** com pivoteamento parcial é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/7 & 1 & 0 \\ 1/4 & -3/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & 7/4 & 9/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & -6/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}.$$

Observe que o multiplicador m_{ij}, determinado no processo de eliminação, não aparece necessariamente na posição (i, j) da matriz **L** por causa das permutações das linhas!

Resolução de um Sistema Linear por Fatoração LU COM Pivoteamento Parcial

Suponha que $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ e $\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{\det(\mathbf{P})}\det(U) \neq 0$. (Note que $\det(\mathbf{P}) \in \{-1, 1\}$.) Neste caso, temos

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \Leftrightarrow (\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{Pb} \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{Pb}.$$

Portanto, podemos

1. Determinar a solução $\mathbf{y}^*$ de $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$;
2. Determinar a solução $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}^*$.

Então podemos concluir que $\mathbf{PAx}^* = \mathbf{L}(\mathbf{Ux}^*) = \mathbf{Ly}^* = \mathbf{Pb}$. Equivalentemente, temos $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$.

Exemplo: Resolução de um Sistema Linear por Fatoração LU Com Pivoteamento Parcial

Exemplo 8

Sejam **A** e **b** a matriz e o vetor do Exemplo 6:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A fatoração LU com pivoteamento parcial da matriz **A** resultou nas seguintes matrizes $\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{P}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8, Continuação: Resolução de um Sistema Linear por Fatoração LU Com Pivoteamento Parcial

Passos a serem executados:

1. Determinar a solução $\mathbf{y}^*$ de $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$;
2. Determinar a solução $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}^*$.

1.
$$[\mathbf{L}|\mathbf{Pb}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{10}{3} \\ -2 \end{bmatrix},$$

2.
$$[\mathbf{U}|\mathbf{y}^*] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Teorema 9

Qualquer matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *não-singular pode ser fatorada como*

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

em que $\mathbf{U}$ *é triangular superior,* $\mathbf{L}$ *é triangular inferior com diagonal unitária e* $\mathbf{P}$ *é uma matriz de permutação.*

Como consequência, tanto a eliminação de Gauss como a fatoração LU com pivoteamento parcial pode ser usadas para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sempre que $\mathbf{A}$ for não-singular.

Se a matriz $\mathbf{A}$ for singular, haverá um pivô nulo no processo de eliminação com pivoteamento parcial!

Comandos do MATLAB e GNU Octave

A fatoração LU de **A** é determinada através do comando:

$$>> [\mathtt{L},\mathtt{U},\mathtt{P}] = \mathtt{lu}(\mathtt{A});$$

O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é resolvido usando o comando:

$$>> \mathtt{x} = \mathtt{A}\backslash\mathtt{b};$$

que, basicamente, implementa a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

Alertamos, porém, que o comando $>> \mathtt{x} = \mathtt{A}\backslash\mathtt{b};$ vai muito além da eliminação de Gauss! Ele fornecerá uma resposta mesmo quando o sistema é inconsistente ou admite infinitas soluções!

Pivoteamento Total

Há também uma estratégia de pivoteamento total, na qual busca-se o elemento de maior valor absoluto dentre as linhas e colunas abaixo do pivô.

O pivoteamento total, porém, requer uma busca longa entre os elementos da matriz **A**.

Consequentemente, não há benefícios ao empregar a estratégia de pivoteamento total!

O pivoteamento parcial é tão empregado que, ao referir a fatoração LU ou eliminação de Gauss, geralmente assumimos o uso essa estratégia!

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos a técnica de pivotemamento parcial para o método da eliminação de Gauss e fatoração LU.

Na técnica de pivoteamento parcial, permutamos linhas da matriz de modo que o pivo, i.e., elemento da diagonal, tenha valor absoluto maior ou igual aos elementos abaixo dele.

O pivoteamento parcial é tão empregado que, ao referir a fatoração LU ou eliminação de Gauss, geralmente assumimos o uso dessa estratégia!

Muito grato pela atenção!