

MS211 - Cálculo Numérico

Conceitos de Erros, Aritmética de Ponto Flutuante

Conceitos de Erros

Notação

Se x é um número real, então \bar{x} denota uma aproximação de x . Por exemplo, \bar{x} pode ser

- $\text{fl}(x)$, quer dizer a representação de x no sistema de ponto flutuante,
- um valor aproximado de x obtido por medição,
- qualquer outra estimativa de x .

Conceitos de Erros

Erro Absoluto e Relativo

- O *Erro Absoluto* em x expressa o valor exato menos o valor aproximado.

$$EA_x = x - \bar{x}.$$

- Se $\bar{x} \neq 0$, então o *Erro Relativo* em x expressa o EA_x normalizado por \bar{x} .

$$ER_x = \frac{EA_x}{\bar{x}}.$$

- Se $\bar{x} = 0$, então o *Erro Relativo* em x não está definido.
- Muitas vezes, estamos interessados nas grandezas de EA_x e ER_x , quer dizer em $|EA_x|$ e $|ER_x|$.

Exemplo 1

A representação de $x_1 = 1234.56$, $x_2 = -0.00054962$, e $x_3 = 0.9995$ no sistema $F(10, 3, [-5, 5])$ resultou em $\bar{x}_1 = \text{fl}(x_1) = 0.123 \cdot 10^4$, $\bar{x}_2 = \text{fl}(x_2) = -0.550 \cdot 10^{-3}$, e $\bar{x}_3 = \text{fl}(x_3) = 0.100 \cdot 10^1$. Calcule EA_{x_i} e ER_{x_i} para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 1

A representação de $x_1 = 1234.56$, $x_2 = -0.00054962$, e $x_3 = 0.9995$ no sistema $F(10, 3, [-5, 5])$ resultou em $\bar{x}_1 = \text{fl}(x_1) = 0.123 \cdot 10^4$, $\bar{x}_2 = \text{fl}(x_2) = -0.550 \cdot 10^{-3}$, e $\bar{x}_3 = \text{fl}(x_3) = 0.100 \cdot 10^1$. Calcule EA_{x_i} e ER_{x_i} para $i = 1, 2, 3$.

Resposta:

$$EA_{x_1} = x_1 - \bar{x}_1 = 1234.56 - 1230 = 4.56,$$

$$ER_{x_1} = EA_{x_1}/\bar{x}_1 = 4.56/1230 \approx 0.37073 \cdot 10^{-2},$$

$$\begin{aligned} EA_{x_2} &= x_2 - \bar{x}_2 = (-0.54962 + 0.550) \cdot 10^{-3} \\ &= 0.00038 \cdot 10^{-3} = 0.38 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$ER_{x_2} = EA_{x_2}/\bar{x}_2 = (0.38 \cdot 10^{-6})/(0.550 \cdot 10^{-3}) \approx 0.63636 \cdot 10^{-3},$$

$$EA_{x_3} = x_3 - \bar{x}_3 = 0.9995 - 1 = -0.5 \cdot 10^{-3},$$

$$ER_{x_3} = EA_{x_3}/\bar{x}_3 = -0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Aritmética de Ponto Flutuante

Além de representar números no computador, precisamos também efetuar operações com eles.

As operações aritméticas básicas $+$, $-$, \times e \div com números reais, quando realizadas no computador com sistema $F(\beta, t, [a, b])$, serão denotadas por \oplus , \ominus , \otimes e \oslash .

As operações aritméticas de ponto flutuante são definidas de modo a satisfazer o axioma:

Axioma das Operações de Ponto Flutuante:

Sejam $*$ uma operação aritmética básica e \circledast seu análogo em ponto flutuante. Para todo $x, y \in F(\beta, t, [a, b])$, deve-se ter

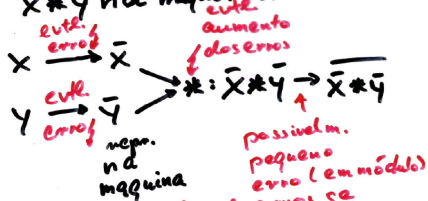
$$x \circledast y = fl(x * y).$$

Operações Aritméticas na Máquina

Seja $\star = +, -, \cdot$ ou $/$.

Esquema para calcular

$x \star y$ na máquina:



Obs.: propagação de erros se

$$x \neq \bar{x} \text{ ou } y \neq \bar{y}$$

Para $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ tem-se:

$$|ER_{x \star y}| < \beta^{1-t} \quad \text{para trunca-mento}$$

$$|ER_{x \star y}| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t} \quad \text{para arredonda-mento}$$

se $ER_{x \star y}$ definido

Exemplo de uma Multiplicação na Máquina

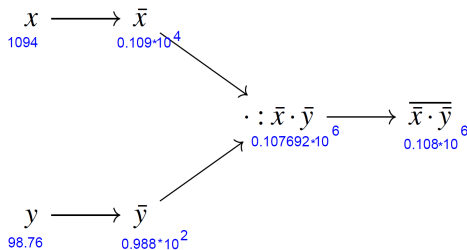


Figura: Exemplo de uma multiplicação numa máquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-9, 9])$.

Exemplo de uma Divisão na Máquina

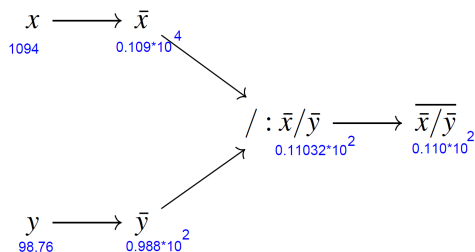


Figura: Exemplo de uma divisão numa maquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-9, 9])$.

Exemplo de uma Adição na Máquina

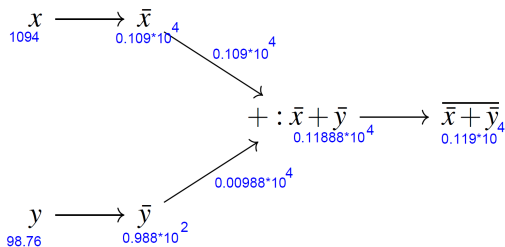


Figura: Exemplo de uma adição numa máquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-9, 9])$. Note que, antes de somar as mantissas, \bar{x} e \bar{y} são escritos usando o mesmo expoente $4 = \max\{4, 2\}$.

Exemplo de uma Subtração na Máquina

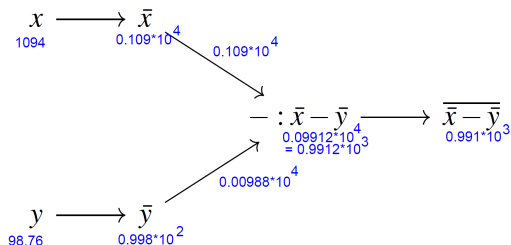


Figura: Exemplo de uma subtração numa máquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-9, 9])$. Note que, antes de subtrair as mantissas, \bar{x} e \bar{y} são escritos usando o mesmo expoente $4 = \max\{4, 2\}$.

Mais um Exemplo de uma Subtração na Máquina

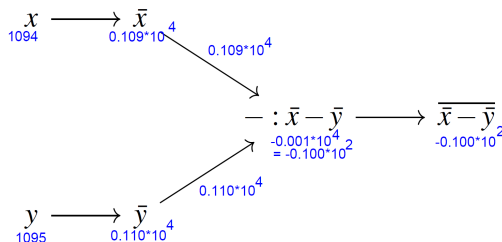


Figura: Exemplo de uma subtração numa maquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-9, 9])$. Neste caso, temos

$$EA_{x-y} = x - y - \bar{x} - \bar{y} = -1 - (-10) = 9 \text{ e}$$

$$ER_{x-y} = EA_{x-y} / \bar{x} - \bar{y} = 9 / (-10) = -0.9.$$

Propagação dos Erros

Seja $x \neq \bar{x} = fl(x)$ ou $y \neq \bar{y} = fl(y)$. Portanto, $x = \bar{x} + EA_x$, sendo $EA_x \neq 0$ ou $y = \bar{y} + EA_y$, sendo $EA_y \neq 0$.

Adição

$$x + y = (\bar{x} + EA_x) + (\bar{y} + EA_y) = (\bar{x} + \bar{y}) + (EA_x + EA_y)$$

$$\Rightarrow EA_{x+y} \approx EA_x + EA_y.$$

$$ER_{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{x \oplus y} = \frac{EA_{x+y}}{\bar{x} + \bar{y}} \approx \frac{EA_{x+y}}{\bar{x} + \bar{y}}$$

$$\approx \frac{EA_x}{\bar{x}} \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + \frac{EA_y}{\bar{y}} \cdot \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

$$= ER_x \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} \right) + ER_y \cdot \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} \right)$$

Propagação dos Erros

Seja $x \neq \bar{x} = fl(x)$ ou $y \neq \bar{y} = fl(y)$.

Subtração

$$EA_{x-y} \approx EA_x - EA_y.$$

$$ER_{x-y} \approx ER_x \cdot \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}\right) - ER_y \cdot \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\right)$$

$|ER_{x-y}|$ pode ser muito maior que $|ER_x|$ e $|ER_y|$ se $\bar{x} \approx \bar{y}$.

Multiplicação

$$ER_{x \cdot y} \approx ER_x + ER_y. \quad (1)$$

Divisão

$$ER_{x/y} \approx ER_x - ER_y. \quad (2)$$

Exemplo de uma Subtração em $F(3, 10, [-5, 5])$ Exemplo (arredondamento)Seja $t=3$, $e \in [-5, 5]$

$$x = 0.8735 \Rightarrow \bar{x} = 0.874 \cdot 10^0$$

$$y = 0.8734 \Rightarrow \bar{y} = 0.873 \cdot 10^0$$

$$EA_{x-y} = (x-y) - (\bar{x} - \bar{y})$$

$$= 10^{-4} - 10^{-3} = 0.0001 - 0.001$$

$$= -0.0009 = -0.9 \cdot 10^{-3}$$

$$ER_{x-y} = \frac{EA_{x-y}}{\bar{x} - \bar{y}} = \frac{-0.9 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$

$$= \underline{\underline{-0.9}} \quad \text{erro relativamente grande em módulo}$$

Lembre-se

$$ER_{x-y} \approx ER_x \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \right) - ER_y \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \right)$$

cálculo subtrativo

Figura: Exemplo de uma subtração numa máquina que trabalha no sistema $F(10, 3, [-5, 5])$.

Na aula de hoje, apresentamos dois conceitos de erros e a maneira como executar operações na aritmética de ponto flutuante.

Os erros de arredondamento, quando repetidos em algoritmos longos e complexos, podem ter efeitos catastróficos.

Exemplos incluem:

- Fracasso do míssil Patriot durante a Guerra do Golfo em 1991, devido a um erro de arredondamento no cálculo de sua trajetória.
 - Explosão do foguete Ariane em Junho de 1996 devido à *overflow* no computador de bordo.
-

Na próxima aula, continuaremos nossos estudos sobre erros na resolução de sistemas lineares.

Muito grato pela atenção!