

# MS211 - Cálculo Numérico

## Conceitos de Erros, Aritmética de Ponto Flutuante

# Conceitos de Erros

## Notação

Se  $x$  é um número real, então  $\bar{x}$  denota uma aproximação de  $x$ . Por exemplo,  $\bar{x}$  pode ser

- $f_1(x)$ , quer dizer a representação de  $x$  no sistema de ponto flutuante,
- um valor aproximado de  $x$  obtido por medição,
- qualquer outra estimativa de  $x$ .

# Conceitos de Erros

## Erro Absoluto e Relativo

- O *Erro Absoluto* em  $x$  expressa o valor exato menos o valor aproximado.

$$EA_x = x - \bar{x}.$$

- Se  $\bar{x} \neq 0$ , então o *Erro Relativo* em  $x$  expressa o  $EA_x$  normalizado por  $\bar{x}$ .

$$ER_x = \frac{EA_x}{\bar{x}}.$$

- Se  $\bar{x} = 0$ , então o *Erro Relativo* em  $x$  não está definido.
- Muitas vezes, estamos interessados nas grandezas de  $EA_x$  e  $ER_x$ , quer dizer em  $|EA_x|$  e  $|ER_x|$ .

## Exemplo 1

A representação de  $x_1 = 1234.56$ ,  $x_2 = -0.00054962$ , e  $x_3 = 0.9995$  no sistema  $F(10, 3, [-5, 5])$  resultou em  $\bar{x}_1 = f1(x_1) = 0.123 \cdot 10^4$ ,  $\bar{x}_2 = f1(x_2) = -0.550 \cdot 10^{-3}$ , e  $\bar{x}_3 = f1(x_3) = 0.100 \cdot 10^1$ . Calcule  $EA_{x_i}$  e  $ER_{x_i}$  para  $i = 1, 2, 3$ .

## Exemplo 1

A representação de  $x_1 = 1234.56$ ,  $x_2 = -0.00054962$ , e  $x_3 = 0.9995$  no sistema  $F(10, 3, [-5, 5])$  resultou em  $\bar{x}_1 = f1(x_1) = 0.123 \cdot 10^4$ ,  $\bar{x}_2 = f1(x_2) = -0.550 \cdot 10^{-3}$ , e  $\bar{x}_3 = f1(x_3) = 0.100 \cdot 10^1$ . Calcule  $EA_{x_i}$  e  $ER_{x_i}$  para  $i = 1, 2, 3$ .

## Resposta:

$$EA_{x_1} = x_1 - \bar{x}_1 = 1234.56 - 1230 = 4.56,$$

$$ER_{x_1} = EA_{x_1}/\bar{x}_1 = 4.56/1230 \approx 0.37073 \cdot 10^{-2},$$

$$\begin{aligned} EA_{x_2} &= x_2 - \bar{x}_2 = (-0.54962 + 0.550) \cdot 10^{-3} \\ &= 0.00038 \cdot 10^{-3} = 0.38 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$ER_{x_2} = EA_{x_2}/\bar{x}_2 = (0.38 \cdot 10^{-6})/(0.550 \cdot 10^{-3}) \approx 0.63636 \cdot 10^{-3},$$

$$EA_{x_3} = x_3 - \bar{x}_3 = 0.9995 - 1 = -0.5 \cdot 10^{-3},$$

$$ER_{x_3} = EA_{x_3}/\bar{x}_3 = -0.5 \cdot 10^{-3}.$$

## Aritmética de Ponto Flutuante

Além de representar números no computador, precisamos também efetuar operações com eles.

---

As operações aritméticas básicas  $+, -, \times$  e  $\div$  com números reais, quando realizadas no computador com sistema  $F(\beta, t, [a, b])$ , serão denotadas por  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\otimes$  e  $\oslash$ .

---

As operações aritméticas de ponto flutuante são definidas de modo a satisfazer o axioma:

**Axioma das Operações de Ponto Flutuante:**

Sejam  $*$  uma operação aritmética básica e  $\circledast$  seu análogo em ponto flutuante. Para todo  $x, y \in F(\beta, t, [a, b])$ , deve-se ter

$$x \circledast y = \text{fl}(x * y).$$

# Operações Aritméticas na Máquina

Seja  $\star = +, -, \cdot$  ou  $/$ .

Esquema para calcular

$x \star y$  na máquina:



Obs.: propagação de erros se

$x \neq \bar{x}$  ou  $y \neq \bar{y}$

Para  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$  tem-se:

$$|ER_{x \star y}| \leq \beta^{1-t} \text{ para truncamento}$$

$|ER_{x \star y}| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t}$  para arredondamento

se  $ER_{x \star y}$  determinado

# Exemplo de uma Multiplicação na Máquina

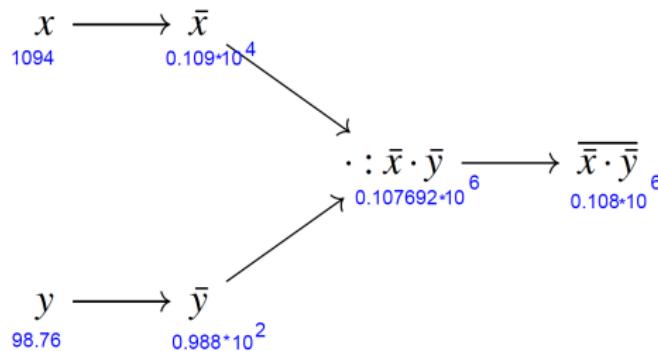


Figura: Exemplo de uma multiplicação numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-9, 9])$ .

# Exemplo de uma Divisão na Máquina

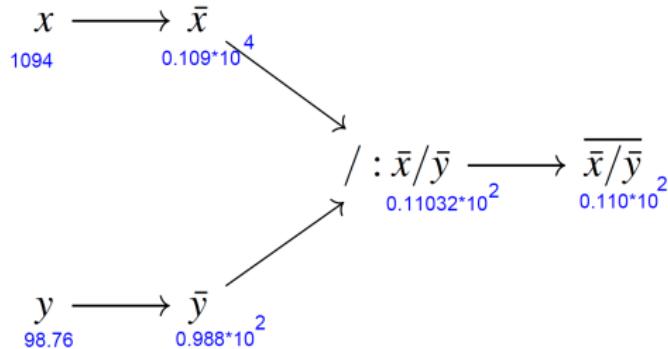


Figura: Exemplo de uma divisão numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-9, 9])$ .

# Exemplo de uma Adição na Máquina

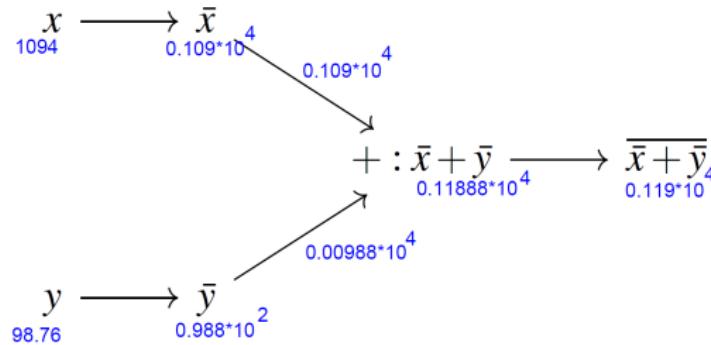


Figura: Exemplo de uma adição numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-9, 9])$ . Note que, antes de somar as mantissas,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são escritos usando o mesmo expoente  $4 = \max\{4, 2\}$ .

# Exemplo de uma Subtração na Máquina

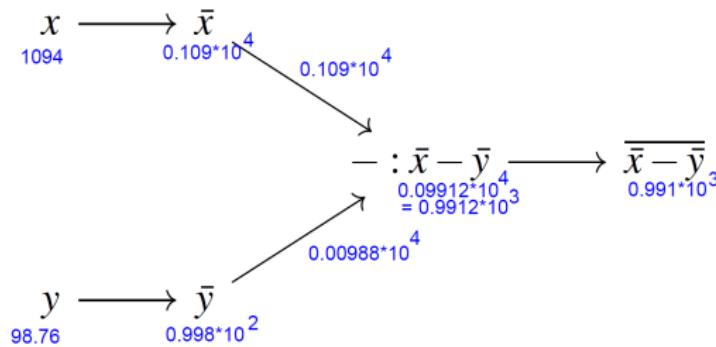
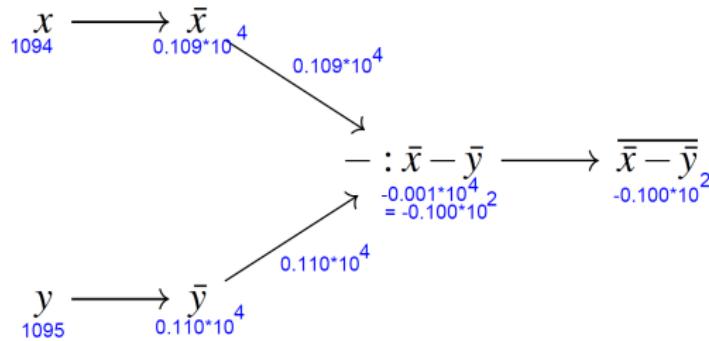


Figura: Exemplo de uma subtração numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-9, 9])$ . Note que, antes de subtrair as mantissas,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são escritos usando o mesmo expoente  $4 = \max\{4, 2\}$ .

# Mais um Exemplo de uma Subtração na Máquina



**Figura:** Exemplo de uma subtração numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-9, 9])$ . Neste caso, temos

$$EA_{x-y} = x - y - \bar{x} - \bar{y} = -1 - (-10) = 9 \text{ e}$$

$$ER_{x-y} = EA_{x-y} / \bar{x} - \bar{y} = 9 / (-10) = -0.9.$$

# Propagação dos Erros

Seja  $x \neq \bar{x} = f1(x)$  ou  $y \neq \bar{y} = f1(x)$ . Portanto,  $x = \bar{x} + EA_x$ , sendo  $EA_x \neq 0$  ou  $y = \bar{y} + EA_y$ , sendo  $EA_y \neq 0$ .

## Adição

$$\begin{aligned} x + y &= (\bar{x} + EA_x) + (\bar{y} + EA_y) = (\bar{x} + \bar{y}) + (EA_x + EA_y) \\ &\Rightarrow EA_{x+y} \approx EA_x + EA_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ER_{x+y} &= \frac{EA_{x+y}}{x+y} = \frac{EA_{x+y}}{\bar{x}+\bar{y}} \approx \frac{EA_{x+y}}{\bar{x}+\bar{y}} \\ &\approx \frac{EA_x}{\bar{x}} \cdot \left( \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} \right) + \frac{EA_y}{\bar{y}} \cdot \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}} \right) \\ &= ER_x \cdot \left( \frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}} \right) + ER_y \cdot \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}} \right) \end{aligned}$$

# Propagação dos Erros

Seja  $x \neq \bar{x} = \text{fl}(x)$  ou  $y \neq \bar{y} = \text{fl}(y)$ .

## Subtração

$$EA_{x-y} \approx EA_x - EA_y.$$

$$ER_{x-y} \approx ER_x \cdot \left( \frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}} \right) - ER_y \cdot \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}} \right)$$

$|ER_{x-y}|$  pode ser muito maior que  $|ER_x|$  e  $|ER_y|$  se  $\bar{x} \approx \bar{y}$ .

## Multiplicação

$$ER_{x \cdot y} \approx ER_x + ER_y. \quad (1)$$

## Divisão

$$ER_{x/y} \approx ER_x - ER_y. \quad (2)$$

# Exemplo de uma Subtração em $F(3, 10, [-5, 5])$

Exemplo (arredondamento)

Seja  $t=3$ ,  $e \in [-5, 5]$

$$\begin{aligned} x &= 0.8735 \Rightarrow \bar{x} = 0.874 \cdot 10^0 \\ y &= 0.8734 \Rightarrow \bar{y} = 0.873 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EA_{x-y} &= (x-y) - (\bar{x}-\bar{y}) \\ &= 10^{-4} - 10^{-3} = 0.0001 - 0.001 \\ &= -0.0009 = -0.9 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$ER_{x-y} = \frac{EA_{x-y}}{\bar{x}-\bar{y}} = \frac{-0.9 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}$$

$$= -0.9 \quad \text{erro relativamente grande em módulo}$$

Lembre-se

$$ER_{x-y} \approx ER_x \left( \frac{\bar{x}}{x-\bar{y}} \right) - ER_y \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}-y} \right)$$

cancelamento subtrativo

Figura: Exemplo de uma subtração numa máquina que trabalha no sistema  $F(10, 3, [-5, 5])$ .

Na aula de hoje, apresentamos dois conceitos de erros e a maneira como executar operações na aritmética de ponto flutuante.

---

Os erros de arredondamento, quando repetidos em algoritmos longos e complexos, podem ter efeitos catastróficos.

Exemplos incluem:

- Fracasso do míssil Patriot durante a Guerra do Golfo em 1991, devido a um erro de arredondamento no cálculo de sua trajetória.
  - Explosão do foguete Ariane em Junho de 1996 devido à *overflow* no computador de bordo.
- 

Na próxima aula, continuaremos nossos estudos sobre erros na resolução de sistemas lineares.

Muito grato pela atenção!

