# MS211 - Cálculo Numérico

## Eliminação de Gauss e Fatoração LU
## (Slides Modificados de M. E. Valle)

# Introdução

Na aula anterior, apresentamos o modelo de Leontief, que pode ser formulado como um sistema linear com $n$ equações e $n$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

---

Sistemas lineares é provavelmente o mais importante problema matemático encontrado em aplicações científicas e industriais.

# Soluções de Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ter *nenhuma solução*, *uma única solução* ou *infinitas soluções*.

---

Um sistema linear com *n equações e n incógnitas* define *n híperplanos no* $\mathbb{R}^n$.

---

$x \in \mathbb{R}^n$ é uma *solução* se e somente se $x$ está na *interseção destes híperplanos* (retas no $\mathbb{R}^2$, planos no $\mathbb{R}^3$).

---

O conjunto de todas as soluções de um sistema linear é chamado *conjunto solução*.

---

Dizemos que dois sistemas lineares são *equivalentes* se possuem o mesmo conjunto solução.

# Notação Matricial

Para facilitar a exposição, identificamos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

com a equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não-singular se, e somente se, existe uma matriz $\mathbf{A}^{-1}$, chamada *inversa de* $\mathbf{A}$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

em que $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota a matriz identidade.

---

Equivalentemente, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não-singular se, e somente se, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

---

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz não-singular, então a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Logo, o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é admite uma *única solução*!

---

Apesar dessa considerações teóricas, não determinaremos a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando $\mathbf{A}^{-1}$ pois o cálculo da inversa de $\mathbf{A}$ exige um número desnecessário de operações aritméticas!

# Operações Elementares

A aplicação de operações elementares em um sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ resulta em um sistema linear equivalente $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$, quer dizer os conjuntos solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ são iguais.

## Operações Elementares

- Permutar duas equações.
- Multiplicar uma equação por uma constante não-nula.
- Adicionar (ou subtrair) um múltiplo de uma equação à outra.

# Eliminação de Gauss (sem Pivoteamento)

Um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é transformado num sistema linear equivalente $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, sendo $\mathbf{U}$ uma matriz triangular superior.

---

Como veremos, $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ pode ser resolvido facilmente usando a substituição reversa.

---

Em cada passo da eliminação de Gauss (sem pivoteamento), um múltiplo de uma equação é subtraido de uma outra.

# Matriz Aumentada

Dado um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, recomenda-se aplicar o método da eliminação de Gauss à *matriz aumentada* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

Aqui $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ denota a matriz $\mathbf{A}$ concatenada com o vetor $\mathbf{b}$.

Inicialmente, escrevemos $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$.

A cada estágio $j = 0, 1, \ldots, n-1$, operações elementares são aplicadas no par $[\mathbf{A}^{(j)}|\mathbf{b}^{(j)}]$ para obter um novo par $[\mathbf{A}^{(j+1)}|\mathbf{b}^{(j+1)}]$ com zeros abaixo do pivô que corresponde ao elemento $a_{jj}^{(j)}$.

# Passos da Eliminação Gaussiana

No primeiro passo, introduzimos zeros abaixo de $a_{11}^{(0)}$ subtraindo da $i$-ésima linha de $[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}]$ um múltiplo $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ da primeira linha de $[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}]$.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & | & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & | & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & | & b_n^{(0)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

No $j$-ésimo passo, introduzimos zeros abaixo de $a_{jj}^{(j-1)}$, ou seja, para $i = j+1, \dots, n$, subtraimos da $i$-ésima linha de $[\mathbf{A}^{(j-1)}|\mathbf{b}^{(j-1)}]$ um múltiplo $m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$ da $i$-ésima linha de $[\mathbf{A}^{(j-1)}|\mathbf{b}^{(j-1)}]$.

# Exemplo 0: Um Exemplo Simples

Exemplo

Resolve $A \cdot x = b$

onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$L_2 := L_2 - 2L_1$

$L_3 := L_3 - 3L_1$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right)$$

$m_{21} = 2$

$m_{31} = 3$

$m_{32} = \frac{-2}{-1} = 2$

$L_3 := L_3 - 2L_2$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

# Solução do Exemplo 0

Da página anterior obtemos:

Exemplo:

Resolve
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ y + 2z &= 7 \\ \cancel{1z} \quad 2z &= -2 \end{aligned}$$

$$z = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{7 - 2(-1)}{1} = 9$$

$$x = \frac{4 - (2 \cdot 9 + 3(-1))}{1} = 4 - 15 = -11$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Exemplo 1

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 1

Use o método da eliminação de Gauss para determinar a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Resposta:** Primeiramente, definimos

$$[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & 0.5 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 & 0.4 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 & 0.3 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 & 0 \end{array}\right]$$

# Passo 1

$$[\mathbf{A}^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & 0.5 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 & 0.4 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 & 0.3 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 & 0 \end{array}\right]$$

No primeiro estágio do método da eliminação de Gauss, calculamos os multiplicadores

$$m_{21} = \frac{-0.2}{0.8} = -0.25, \quad m_{31} = -0.375 \quad \text{e} \quad m_{41} = -0.25.$$

$$[\mathbf{A}^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & -0.375 & 0.725 & -0.3125 & 0.4875 \\ 0 & -0.25 & -0.45 & 0.725 & 0.125 \end{array}\right]$$

# Passo 2

Assim, ao final no primeiro passo:

$$[\mathbf{A}^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & -0.375 & 0.725 & -0.3125 & 0.4875 \\ 0 & -0.25 & -0.45 & 0.725 & 0.125 \end{array}\right]$$

No segundo passo calculamos os multiplicadores

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-0.375}{0.85} = -0.44118 \quad \text{e} \quad m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -0.29412.$$

e, com eles, encontramos a matriz aumentada

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & 0 & 0.61471 & -0.47794 & 0.71912 \\ 0 & 0 & -0.52353 & 0.61471 & 0.27941 \end{array}\right]$$

# Passo 3

Calculamos

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & 0 & 0.61471 & -0.47794 & 0.71912 \\ 0 & 0 & -0.52353 & 0.61471 & 0.27941 \end{array}\right]$$

No último passo (Passo 3), calculamos o multiplicador

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{-0.52353}{0.61471} = -0.85167,$$

e determinamos a matriz aumentada

$$[\mathbf{A}^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & 0 & 0.61471 & -0.47794 & 0.71912 \\ 0 & 0 & 0 & 0.20766 & 0.89187 \end{array}\right]$$

# Resultado obtido por Substituição Reversa

Considerando que

$$[\mathbf{A}^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 & 0.50 \\ 0 & 0.85 & -0.25 & -0.375 & 0.525 \\ 0 & 0 & 0.61471 & -0.47794 & 0.71912 \\ 0 & 0 & 0 & 0.20766 & 0.89187 \end{array}\right]$$

Finalmente, usando a substituição reversa, a solução do sistema linear é

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 4.3226 \\ 3.8387 \\ 4.5092 \\ 4.2949 \end{bmatrix}$$

# Sistema Triangular Superior

Se $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz triangular superior não-singular, i.e,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

com $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então a solução de $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ é determinada usando a chamada *substituição reversa* (do inglês *back substitution*). Formalmente, tem-se

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), \quad \text{para } i = n, n-1, \ldots, 1.$$

A substituição reversa efetua $\mathcal{O}(n^2)$ operações aritméticas.

## Exemplo 2

Resolva o sistema triangular superior $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, em que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & +0.85 & -0.25 & -0.38 \\ 0 & 0 & 0.61 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0.21 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.53 \\ 0.72 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 2

Resolva o sistema triangular superior $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, em que

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & +0.85 & -0.25 & -0.38 \\ 0 & 0 & 0.61 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 & 0.21 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.53 \\ 0.72 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$

**Resposta:** A solução do sistema $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$, que resolvemos na aula anterior usando a substituição reversa, é

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 4.32 \\ 3.84 \\ 4.51 \\ 4.29 \end{bmatrix}$$

## Algoritmo da Eliminação de Gauss

**Entrada:** Matriz não-singular $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e vetor coluna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

**para** $j = 1$ *até* $n - 1$ **faça**
- **para** $i = j + 1$ *até* $n$ **faça**
  - $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$.
  - $b_i = b_i - m_{ij} b_j$.
  - **para** $k = j + 1$ *até* $n$ **faça**
    - $a_{ik} = a_{ik} - m_{ij} a_{jk}$
  - **fim**
- **fim**

**fim**

**Saída:** Matriz triangular superior **A** e **b**.

No algoritmo acima, **U** e **c** são escritas sobre **A** e **b**.

# Número de Operações da Eliminação de Gauss

No *loop* para $j$, efetuamos

$$(\#\text{operações}) = \sum_{j=1}^{n-1} (\#\text{operações efetuadas no estágio } j).$$

O *loop* para $i$, resulta em outro somatório

$$(\#\text{operações}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (\text{operações efetuadas na linha } i).$$

Na linha $i$, efetuamos $1 + 2 + 2(n-(j+1)) = 2(n-j)+1$ operações. Assim, o número de operações efetuadas na eliminação de Gauss é

$$(\#\text{operações}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \left[2(n-j)+1\right] = \frac{2}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{6}n + 1 = \mathcal{O}(n^3).$$

# Fatoração LU

Os multiplicadores $m_{ij}$ podem ser organizados numa matriz **L** triangular inferior com diagonal unitária:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz original **A**, a matriz triangular superior **U** obtida no final do processo de eliminação e a matriz **L** triangular inferior com os multiplicadores satisfazem:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

chamada **fatoração LU** de **A**.

# Resolução de um Sistema Linear por Fatoração LU

Suponha que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ e $\det(\mathbf{A}) = \det(U) \neq 0$. Neste caso, temos

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}.$$

Portanto, podemos

1. Determinar a solução $\mathbf{y}^*$ de $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$;
2. Determinar a solução $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}^*$.

Então podemos concluir que $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{L}(\mathbf{Ux}^*) = \mathbf{Ly}^* = \mathbf{b}$.

# Sistema Triangular Inferior

Se $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz triangular inferior não-singular, i.e,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix},$$

com $l_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então a solução de $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ é determinada usando a chamada *substituição direta*:

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

A substituição direta também requer $\mathcal{O}(n^2)$ operações.

## Exemplo 3

Resolva o sistema triangular inferior $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.25 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.38 & -0.44 & 1.00 & 0.00 \\ -0.25 & -0.29 & -0.85 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 3

Resolva o sistema triangular inferior $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, em que

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.25 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.38 & -0.44 & 1.00 & 0.00 \\ -0.25 & -0.29 & -0.85 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Resposta:** A solução do sistema, obtida usando substituição direta, é $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ é

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.53 \\ 0.72 \\ 0.89 \end{bmatrix}$$

# Custos Computacionais em termos do $\#$ de Operações Aritméticas

1. $\mathcal{O}(n^2)$ para a resolver $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ usando substituição direta;
2. $\mathcal{O}(n^2)$ para a resolver $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ usando substituição reversa;
3. $\mathcal{O}(n^3)$ tanto para determinar a fatoração LU quanto para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando eliminação Gaussiana.

Vale a pena determinar a fatoração LU de $\mathbf{A}$???

A fatoração LU é particularmente útil se precisamos resolver vários sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^{(k)}$, com diferentes vetores $\mathbf{b}^{(k)}$.

---

Na prática, pode-se guardar as entradas de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ numa única matriz $\mathbf{R}$, sobreescrevendo $\mathbf{A}$.

# Um Método Simples para Determinar a Fatoração LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$A = L \cdot U$ onde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

# Dica porque $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ é válido

No exemplo anterior,

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

# Continuação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

Portanto,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

## Exemplo 4

Determine a fatoração LU da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 4

Determine a fatoração LU da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & -0.3 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

**Resposta:** Com base nos exemplos anteriores, tem-se

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.25 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.38 & -0.44 & 1.00 & 0.00 \\ -0.25 & -0.29 & -0.85 & 1.00 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.80 & -0.20 & -0.20 & -0.30 \\ 0.00 & 0.85 & -0.25 & -0.38 \\ 0.00 & 0.00 & 0.61 & -0.48 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.21 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

# Resolução de um Sistema Linear Usando Fat. LU, I

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 29 & -8 \\ 3 & -8 & 14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 6 & 3 \\ \hdashline \frac{2}{3} & 29 - \frac{2}{3}\cdot 6 & -8 - \frac{2}{3}\cdot 3 \\ \frac{1}{3} & -8 - \frac{1}{3}\cdot 6 & 14 - \frac{1}{3}\cdot 3 \end{array}\right) && (1) \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 6 & 3 \\ \hdashline \frac{2}{3} & 25 & -10 \\ \frac{1}{3} & -10 & 13 \end{array}\right) && (2) \end{aligned}$$

# Resolução de um Sistema Linear Usando Fat. LU, II

Etapa 2: $m_3^{(2)} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ \frac{2}{3} & 25 & -10 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 13 - \frac{2}{5} \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ \frac{2}{3} & 25 & -10 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 9 \end{pmatrix}$$

Obtemos $A = L \cdot U$, onde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Supor que queremos resolver $Ax = b$

$\iff L \cdot (Ux) = b$

Podemos resolver (1) $L \cdot y = b$

(2) $U \cdot x = y$

# Resolução de um Sistema Linear Usando Fat. LU, III

Exemplo

Resolve $Ax = b$ onde $b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$

1. $Ly = b$

matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 20 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$y_1 = \underline{\underline{15}}$$

$$10 + y_2 = 20 \Rightarrow y_2 = \underline{\underline{10}}$$

$$5 - 4 + y_3 = -8$$

$$\Rightarrow y_3 = -8 + 4 - 5 = \underline{\underline{-9}}$$

$$y = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

# Resolução de um Sistema Linear Usando Fat. LU, IV

2. $Ux = y$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 6 & 3 & 15 \\ 0 & 25 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

$$9x_3 = -9 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$25x_2 + 10 = 10 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$9x_1 - 3 = 15 \Rightarrow 9x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos uma breve revisão de aritmética matricial e destacamos que tanto o produto matricial $\mathbf{Ax}$ como a solução de um sistema triangular requerem $\mathcal{O}(n^2)$ operações.

---

Na aula de hoje também formalizamos o método da eliminação de Gauss que foi brevemente introduzido na aula anterior.

---

Observamos que o método da eliminação de Gauss é equivalente a fatoração LU, no qual escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Tanto a eliminação de Gauss como a fatoração LU requerem $\mathcal{O}(n^3)$ operações.

Muito grato pela atenção!