

# MS211 - Cálculo Numérico

## Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidell (Slides Modificados de M. E. Valle)

# Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

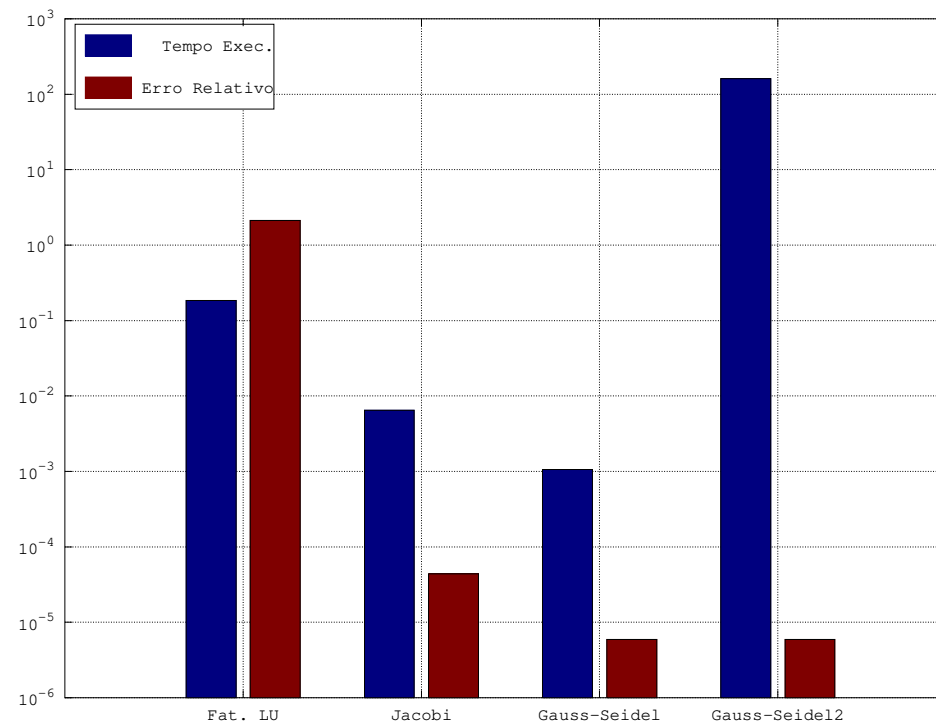
em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz não-singular (e supostamente esparsa).

---

Na aula de hoje também discutiremos a convergência desses métodos.

# Matriz Esparsa Aleatória

Considere o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$  é tal que  $Pr\{a_{ij} = 0\} = 0.99$  para  $i \neq j$  e  $a_{ii} = 1 + \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . O vetor  $\mathbf{b}$  é escolhido de modo que as componentes  $x_i$  da solução  $\mathbf{x}$  tem distribuição normal padrão. O gráfico abaixo mostra o tempo de execução e o erro relativo dos métodos numéricos:



Note que:

- A fatoração LU demorou mais que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel. Além disso, o erro relativo da fatoração LU foi significativamente grande.
- O método de Gauss-Seidel produziu a solução numérica com menor erro e menor tempo de execução.
- A implementação Gauss-Seidel em Octave que não está baseado numa formulação matricial (Gauss-Seidel2) requer um tempo muito maior de execução.

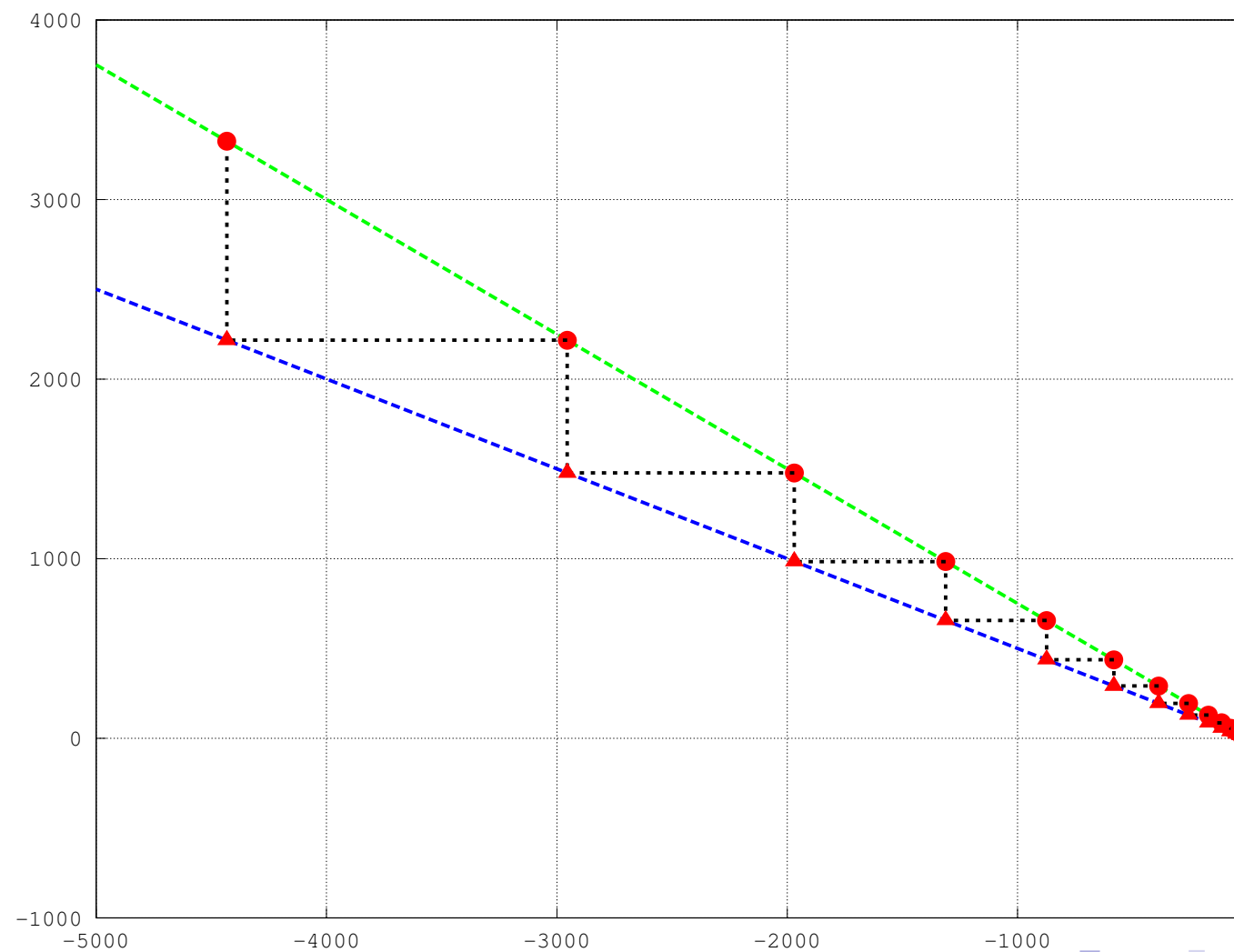
Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel não convergem sempre para a solução do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

### Exemplo 1

Ambos os métodos divergem quando aplicados para resolver o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Com efeito, as 20 primeiras iterações do método de Gauss-Seidel, com  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ , corresponde à sequência de pontos vermelhos mostrados na figura abaixo:



# Convergência dos Métodos Iterativos

Ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots,$$

em que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$  se, e somente se,  $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ .

---

No método de Jacobi, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}[\mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)}] = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D})}_{\mathbf{C}_J} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}.$$

---

No método de Gauss-Seidel, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}) = \underbrace{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{C}_{GS}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{GS}}.$$

A diferença entre duas iterações consecutivas do método  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ ,  $k \geq 1$ , satisfaz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}) - (\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}).$$

---

Considerando uma norma matricial induzida tal que a norma- $\infty$ , temos que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{C}\| \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|, \quad \forall k = 1, \dots$$

---

Aplicando  $k$ -vezes a inequação, concluimos que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \quad \forall k = 1, \dots$$

---

Portanto, se  $\|\mathbf{C}\| < 1$ , então  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \rightarrow 0$ . Isto implica que método iterativo converge?



Suponha que  $\|\cdot\|$  é uma norma induzida,  $\|\mathbf{C}\| < 1$  e  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$  para  $k = 0, 1, \dots$

---

Note que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|\mathbf{C}\|^k < \frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|}, \quad \forall k \geq K.$$

Portanto, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| < \epsilon, \quad \forall k \geq K$$

---

De modo similar, pode-se mostrar que  $(\mathbf{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy e portanto esta sequência converge.

# Critério de Convergência

Concluindo, o seguinte teorema estabelece um critério de convergência para os métodos iterativos (incluindo Jacobi e Gauss-Seidel) definidos pela equação

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geq 0,$$

independentemente da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .

## Teorema 1 (Critério de Convergência)

*A sequência*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

*converge para  $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$  se  $\|\mathbf{C}\| < 1$ , em que  $\|\cdot\|$  denota uma norma matricial induzida.*

No método de Jacobi, temos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{C}| = \begin{bmatrix} 0 & \left| \frac{a_{12}}{a_{11}} \right| & \cdots & \left| \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right| \\ \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| & 0 & \cdots & \left| \frac{a_{2n}}{a_{22}} \right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left| \frac{a_{n1}}{a_{nn}} \right| & \left| \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \right| & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando a norma  $\|\cdot\|_\infty$ , temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}\|_\infty < 1 &\iff \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |c_{ij}| < 1 \\ &\iff \sum_{j=1,\dots,n} |c_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Em palavras, o método de Jacobi converge se cada linha de  $|\mathbf{C}|$  tem soma  $< 1$ , ou - equivalentemente - se a matriz  $\mathbf{A}$  é diagonalmente estritamente dominante.

# Critério das Linhas

## Teorema 2 (Critério das Linhas)

*Considere o sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Se a matriz  $\mathbf{A}$  é diagonalmente estritamente dominante, ou seja,*

$$\alpha_i = \sum_{j=1, \dots, n} |c_{ij}| = \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

*então  $\mathbf{A}$  é invertível e ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel geram uma sequência que converge para a solução do sistema linear independentemente da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .*

### Exemplo 3

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & 2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

## Exemplo 3

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & 2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

**Resposta:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \alpha_2 = 1 \nless 1, \\ \alpha_3 = 2 \nless 1. \end{cases}$$

Logo, o critério das linhas não vale para esse sistema! Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ou não convergir nesse caso!

# Critério de Sassenfeld

## Teorema 4 (Critério de Sassenfeld)

*Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertível e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  arbitrário. Se*

$$\gamma_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \gamma_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right) < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

*então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$  que converge para a solução do sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  independentemente da aproximação inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$ .*

## Observação:

Se o critério das linhas é satisfeito então o critério de Sassenfeld é satisfeito também.

## Exemplo 5

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear do Exemplo 3.



## Exemplo 5

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear do Exemplo 3.

**Resposta:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{C}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 \cdot \gamma_1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} \cdot \gamma_1 & \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \gamma_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \gamma_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 1. & \checkmark \end{cases}$$

Logo, o critério de Sassenfeld é satisfeito!

O método de Gauss-Seidel certamente converge nesse caso.

# Considerações Finais

Na aula de hoje implementamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel no GNU Octave e MATLAB. Destacamos que, nesses dois *softwares*, devemos priorizar uma formulação matricial do método.

---

Na aula de hoje discutimos também critérios de convergência para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel!

---

Observe que o critério apresentado é uma condição suficiente, mas não necessária, para a convergência. Em outras palavras, o método converge se o critério for satisfeito. Nada podemos dizer sobre a convergência se o critério não for satisfeito.

Muito grato pela atenção!