MS211 - Cálculo Numérico

Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidell

(Slides Modificados de M. E. Valle)

Introdução

Na aula anterior, apresentamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel para a solução de um sistema linear

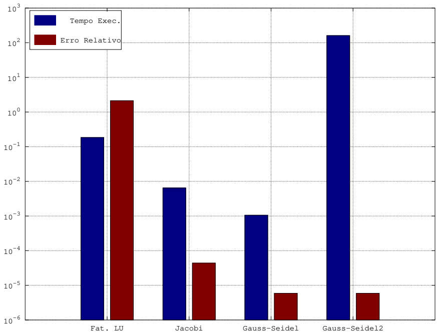
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular (e supostamente esparsa).

Na aula de hoje também discutiremos a convergência desses métodos.

Matriz Esparsa Aleatória

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ é tal que $Pr\{a_{ij} = 0\} = 0.99$ para $i \neq j$ e $a_{ii} = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. O vetor $\mathbf{b}$ é escolhido de modo que as componentes x_i da solução $\mathbf{x}$ tem distribuição normal padrão. O gráfico abaixo mostra o tempo de execução e o erro relativo dos métodos numéricos:



Note que:

- A fatoração LU demorou mais que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel. Além disso, o erro relativo da fatoração LU foi significativamente grande.
- O método de Gauss-Seidel produziu a solução numérica com menor erro e menor tempo de execução.
- A implementação Gauss-Seidel em Octave que não está baseado numa formulação matricial (Gauss-Seidel2) requer um tempo muito maior de execução.

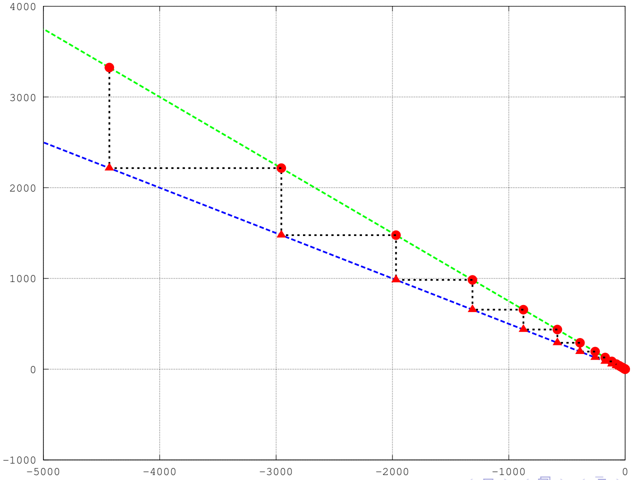
Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel não convergem sempre para a solução do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Exemplo 1

Ambos os métodos divergem quando aplicados para resolver o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Com efeito, as 20 primeiras iterações do método de Gauss-Seidel, com $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$, corresponde à sequência de pontos vermelhos mostrados na figura abaixo:



Convergência dos Métodos Iterativos

Ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

em que $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ se, e somente se, $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

No método de Jacobi, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}[\mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)}] = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D})}_{\mathbf{C}_J}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_J}.$$

No método de Gauss-Seidel, temos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)}) = \underbrace{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}}_{\mathbf{C}_{GS}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}_{GS}}.$$

A diferença entre duas iterações consecutivas do método $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, $k \geqslant 1$, satisfaz

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}\right) - \left(\mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}\right) = \mathbf{C}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right).$$

Considerando uma norma matricial induzida tal que a norma-∞, temos que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leqslant \|\mathbf{C}\|\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|, \quad \forall k = 1, \ldots.$$

Aplicando k-vezes a inequação, concluímos que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leqslant \|\mathbf{C}\|^k\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \quad \forall k = 1, \ldots.$$

Portanto, se $\|\mathbf{C}\| < 1$, então $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \to 0$. Isto implica que método iterativo converge?

Suponha que $\|\cdot\|$ é uma norma induzida, $\|\mathbf{C}\| < 1$ e $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ para $k = 0, 1, \ldots$.

Note que para todo $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{C}\|^k < \frac{\epsilon}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|}, \ \forall k \geqslant K.$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| < \epsilon, \ \forall k \geqslant K$$

De modo similar, pode-se mostrar que $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto esta sequência converge.

Critério de Convergência

Concluindo, o seguinte teorema estabelece um critério de convergência para os métodos iterativos (incluindo Jacobi e Gauss-Seidel) definidos pela equação

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geqslant 0,$$

independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Teorema 1 (Critério de Convergência)

A sequência

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$$

converge para $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x}^* + \mathbf{g}$ *se* $\|\mathbf{C}\| < 1$, *em que* $\|\cdot\|$ *denota uma norma matricial induzida.*

No método de Jacobi, temos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{C}| = \begin{bmatrix} 0 & \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| & \dots & \left|\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right| \\ \left|\frac{a_{21}}{a_{11}}\right| & 0 & \dots & \left|\frac{a_{2n}}{a_{22}}\right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\right| & \left|\frac{a_{n2}}{a_{nn}}\right| & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando a norma $\|\cdot\|_\infty$, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}\|_\infty < 1 \quad &\iff \quad \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |c_{ij}| < 1 \\ &\iff \quad \sum_{j=1,\dots,n} |c_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Em palavras, o método de Jacobi converge se cada linha de $|\mathbf{C}|$ tem soma < 1, ou - equivalentemente - se a matriz $\mathbf{A}$ é diagonalmente estritamente dominante.

Critério das Linhas

Teorema 2 (Critério das Linhas)

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. *Se a matriz* $\mathbf{A}$ *é diagonalmente estritamente dominante, ou seja,*

$$\alpha_i = \sum_{j=1,\ldots,n} |c_{ij}| = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1,\ldots,n,$$

então $\mathbf{A}$ *é invertivel e ambos os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel geram uma sequência que converge para a solução do sistema linear independentemente da aproximação inicial* $\mathbf{x}^{(0)}$.

Exemplo 3

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & 2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Exemplo 3

Verifique se o critério das linhas é válido para o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & 2x_3 & = & 9 \end{cases}$$

Resposta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \alpha_2 = 1 \nless 1, \\ \alpha_3 = 2 \nless 1. \end{cases}$$

Logo, o critério das linhas não vale para esse sistema! Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel podem ou não convergir nesse caso!

Critério de Sassenfeld

Teorema 4 (Critério de Sassenfeld)

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertivel e* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *arbitrário. Se*

$$\gamma_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\gamma_j + \sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\right) < 1, \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *que converge para a solução do sistema linear* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *independentemente da aproximação inicial* $\mathbf{x}^{(0)}$.

Observação:

Se o critério das linhas é satisfeito então o critério de Sassenfeld é satisfeito também.

Exemplo 5

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear do Exemplo 3.

Exemplo 5

Verifique se o critério de Sassenfeld é válido para o sistema linear do Exemplo 3.

Resposta:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{C}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1^{\cdot\gamma_1} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}^{\cdot\gamma_1} & \frac{1}{2}^{\cdot\gamma_2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \gamma_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1, & \checkmark \\ \gamma_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < 1. & \checkmark \end{cases}$$

Logo, o critério de Sassenfeld é satisfeito!
O método de Gauss-Seidel certamente converge nesse caso.

Considerações Finais

Na aula de hoje implementamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel no `GNU Octave` e `MATLAB`. Destacamos que, nesses dois *softwares*, devemos priorizar uma formulação matricial do método.

Na aula de hoje discutimos também critérios de convergência para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel!

Observe que o critério apresentado é uma condição suficiente, mas não necessária, para a convergência. Em outras palavras, o método converge se o critério for satisfeito. Nada podemos dizer sobre a convergência se o critério não for satisfeito.

Muito grato pela atenção!