

1. (a) Considere as funções e_i definidas por

$$e_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Como nos vamos mostrar em (b)

$\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ é base de $\mathcal{F}(N)$

Seja φ a transformação linear unicamente determinada por

$$\varphi(e^i) = x^i \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n$$

$$\{\varphi(e_0), \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\} = \{1, x, \dots, x^n\}$$

que é base de $\mathcal{P}_n$.

Então $\varphi: \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{P}_n$ é um isomorfismo

$$\text{e } \mathcal{F}(N) \cong \mathcal{P}_n$$

(b) (i) $\forall f \in \mathcal{F}(N)$ temos

$$f = f(0)e_0 + f(1)e_1 + \dots + f(n)e_n \quad \text{porque}$$

$$f(0) = f(0) \cdot 1 + 0 = f(0)e_0(0) + f(1)e_1(0) + \dots + f(n)e_n(0)$$

$$f(1) = f(1) \cdot 1 = f(0)e_0(1) + f(1)e_1(1) + \dots + f(n)e_n(1)$$

$$\vdots$$
$$f(n) = f(n) \cdot 1 = f(0)e_0(n) + f(1)e_1(n) + \dots + f(n)e_n(n)$$

$$\text{Então } \text{Span}(e_0, e_1, \dots, e_n) = \mathcal{F}(N)$$