Álgebra Linear (MA327) PROVA 2 (04/10/2010)

Nome: ______________________ RA: __________ Turma: Y

Justifique todas as suas respostas. Boa sorte!

---

1. Quais das funções seguintes representam transformações lineares? No caso afirmativo, verfique se a transformação linear é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

   (a) A função $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathcal{C}^0([1,2])$, definida por $\mathcal{D}(f) = f'$. [1.5 pts]

   (b) A função $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $M(x) = y_2$, onde $y = (y_1, y_2, y_3)^t) \in \mathbb{R}^3$ é uma permutação de $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ que satisfaz $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. [1 pt]

2. Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2)^t, v_2 = (-2,1)^t\}$.

   (a) Confira que $\mathcal{B}$ representa uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. [0.5 pts]

   (b) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz $T(v_1) = v_1$ e $T(v_2) = -v_2$. Descreve em palavras e gráficamente o efeito da aplicação de T em qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$. [0.5 pts]

   (c) Qual é a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ desta transformação linear com respeito à base $\mathcal{B}$? [0.5 pts]

   (d) Seja $\mathcal{C} = \{e_1 = (1,0)^t, e_2 = (0,1)^t\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Quais são as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T? [1.5 pts]

   (e) Considere a transformação linear S determinada por $S(e_1) = e_1 - e_2$ e $S(e_2) = -e_1$. Qual é a matriz da transformação linear $S \circ T$ (com respeito à base $\mathcal{C}$)? [0.5 pts]

3. Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem para cada uma das transformações lineares seguintes.

   (a) A transformação linear $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ dada por $F(p) = \frac{1}{2}p$. [1 pt]

   (b) A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T((x,y)^t) = (x, x-y, x+y)^t$. [1 pt]

   (c) A transformação linear $\mathcal{I} : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{I}(p) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. [1 pt]