Álgebra Linear (MA327) PROVA 1 (23/09/2010)

Nome: ________________________________ RA: __________ Turma: ______

Justifique todas as suas respostas. Boa sorte e bom divertimento!

---

1. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ as afirmações seguintes são verdadeiras:
   (a) O espaço vetorial $\mathcal{F}(N) = \{f : N \to \mathbb{R}\}$, onde $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, é isomorfo a $\mathcal{P}_n$, o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$. [1 pt]
   (b) $\mathcal{F}(N)$ possui uma base finita. Justifique a sua resposta exibindo uma base de $\mathcal{F}(N)$. [1 pt]

2. Considere $\mathbb{R}^{2\times 2}$, o espaço vetorial das matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{R}$.
   (a) Qual é a dimensão de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Justifique a sua resposta. [0.5 pts]
   (b) Considere o seguinte subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:
   $$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Encontre uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{C}$. [1.5 pts]

3. Considere os subconjuntos seguintes do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$:
   $$Z = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}, \; E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) \neq 0\}.$$
   (a) Mostre que o espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ tem dimensão infinita. [1 pt]
   (b) Mostre que Z é um espaço vetorial. [1 pt]
   (c) Verifique se E é espaço vetorial. [0.5 pts]
   (d) Encontre um subespaço U de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = Z \oplus U$. [1.5 pts]

4. Encontre bases para os conjuntos de soluções dos sistemas lineares $Ax = (0, 0)^t$, onde
   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   [1 pt]
   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -0.5 & 1.5 & -1 \end{pmatrix}.$$
   [1 pt]