NAVEGANDO DE FOURIER A WAVELETS

Sônia Maria Gomes
Departamento de Matemática Aplicada
IMECC/UNICAMP
Caixa Postal 6065
CEP 13083-970 - Campinas, SP
soniag@ime.unicamp.br

Margarete O. Domingues
Laboratório Associado de Meteorologia e Oceanografia
CPTEC/INPE
Av. dos Astronautas 1758
12227 – 010 - São José dos Campos, SP
margaret@cptec.inpe.br

Magda K. Kaibara
Departamento de Matemática
FC/UNESP–Bauru
Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, s/n.
17033 – 360 - Bauru, SP
kaibara@fc.unesp.br

Resumo: *Estas notas são uma breve introdução aos conceitos de Análise de Fourier e Análise Wavelet. De maneira geral, existem muitas semelhanças entre estes dois tópicos. Em ambos os casos, sinais são analisados por expansões em termos de funções básicas. A base de Fourier é formada por ondas puras, com as freqüências variando sobre todo o espectro. Neste sentido, os coeficientes de Fourier medem puramente o conteúdo freqüencial do sinal, sem identificar quando tal freqüência ocorre. Já em Análise Wavelet, as bases são localizadas tanto no domínio das freqüências quanto no domínio temporal. Devido a esta propriedade de dupla localização, há um equilíbrio nas resoluções em cada um dos domínios. Ou seja, o ganho de resolução temporal é compensado com uma perda de resolução freqüencial. São estes os aspectos fundamentais tratados* nestas notas.
Palavras-chave: *Processamento de sinais, análise de Fourier, filtros, análise wavelet.*

Introdução

Estas notas são uma breve introdução aos conceitos de Análise de Fourier e Análise Wavelet. Análise de Fourier é uma matéria clássica, assunto obrigatório na formação de todo profissional das áreas da Ciência e Engenharia. Começou a ser desenvolvida no princípio do século XIX, com os trabalhos de Fourier, um renomado matemático francês. Seu método, publicado em 1822 no tratado *Theorie Analytique de la Chaleur*, tornou-se, desde então, objeto de intensa pesquisa por eminentes matemáticos dos séculos XIX e XX. Mas o grande impacto da análise de Fourier nas aplicações só ocorreu com o advento da era computacional, nos anos 60, e com a popularização dos algoritmos rápidos para a implementação numérica da transformada de Fourier. Análise Wavelet surgiu recentemente, em meados dos anos 80, também a partir dos trabalhos de um grupo de pesquisadores franceses. O desenvolvimento da análise wavelet foi vertiginoso. O caminho da teoria às aplicações levou menos de uma década. Como exemplo, é rotina o uso de wavelets como ferramenta matemática poderosa no manuseio do banco de dados de impressões digitais do FBI, e algoritmos para compressão de imagens baseados em wavelets já fazem parte do JPEG 2000.

De maneira geral, existem muitas semelhanças entre Análise de Fourier e Análise Wavelet. Em ambos os casos, sinais são analisados por expansões em termos de funções básicas. A base de Fourier é formada por ondas puras, com as freqüências variando sobre todo o espectro. Neste sentido, os coeficientes de Fourier medem puramente o conteúdo freqüencial do sinal, sem identificar quando tal freqüência ocorre. Já em Análise Wavelet, as bases são localizadas tanto no domínio das freqüências quanto no domínio temporal. Devido a esta propriedade de dupla localização, há um equilíbrio nas resoluções em cada um dos domínios. Ou seja, o ganho de resolução temporal é compensado com uma perda de resolução freqüencial. São estes os apectos fundamentais que são tratados nestas notas, para o caso das wavelets ortogonais de Daubechies. No entanto, cabe lembrar, em Análise Wavelet existem muitas outras possibilidades, em um contexto bem mais amplo das chamadas wavelets biortogonais. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências bibliográficas indicadas.

Sinais e Principais Operações

Nestas notas um sinal pode ser uma função definida na reta real $f(t),\ t \in R$, com *energia finita*. Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt < \infty.$$

Na prática, sinais são tratados na forma discreta, em termos de amostras f_n. Tipicamente, os tempos de amostragem t_n formam uma malha regular, com espaçamento Δt. As amostras podem ser os valores pontuais da função, avaliadas em $n\Delta t$, ou médias ponderadas de f próximo de t_n. De modo geral, seqüências $\mathbf{f}$ tais que a soma dos quadrados de suas componentes é finita,

$$\sum_n |f_n|^2 < \infty,$$

são chamadas de sinais discretos com energia finita.

Um sinal $f(t)$ é dito periódico, de período 2π, quando f avaliada em $t + 2\pi$ é igual a f avaliada em t. Neste caso, a energia é finita se

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt < \infty.$$

Se Δt é igual a $2\pi/N$, e Γ_N é a malha de pontos $n\Delta t$, então as amostras f_n de um sinal 2π-periódico $f(t)$ em Γ_N formam uma seqüência $\mathbf{f}$, que é N-periódica. Ou seja, f_{n+N} é igual a f_n.

As principais operações com sinais são:

- **Soma**

$$[f+g](t) = f(t) + g(t) \qquad [\mathbf{f}+\mathbf{g}]_n = f_n + g_n$$

- **Multiplicação por um escalar**

$$[\lambda f](t) = \lambda f(t) \qquad [\lambda \mathbf{f}]_n = \lambda f_n$$

- **Translação**

$$[S_b f](t) = f(t-b) \qquad [S_m \mathbf{f}]_n = f_{n-m}$$

- **Produto de Convolução**

$$\begin{aligned}
[f*g](t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(t-y) dy \\
[f*g](t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(t-y) dy \quad (\textit{no caso periódico}) \\
[\mathbf{f}*\mathbf{g}]_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m g_{n-m} \quad (\textit{no caso discreto}) \\
[\mathbf{f}*\mathbf{g}]_n &= \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} \quad (\textit{no caso em que } \mathbf{f} \textit{ e } \mathbf{g} \textit{ são sinais discretos } N \textit{ periódicos})
\end{aligned}$$

No tratamento de sinais, ao invés de trabalhar com o sinal diretamente, pode ser mais conveniente analisar o resultado da aplicação de uma transformada sobre o mesmo. Nestas notas consideraremos dois casos: a transformada de Fourier e a transformada wavelet.

Análise de Fourier

Nesta seção são apresentados os conceitos básicos sobre a Análise de Fourier, um dos tópicos mais importantes e bem consolidados da análise matemática, pura e aplicada. Suas técnicas são fundamentais em muitas áreas da Ciência e Tecnologia, sugerem significantes interpretações físicas e possuem aspectos computacionais particularmente interessantes.

Um dos princípios fundamentais em análise de Fourier é que um sinal 2π-periódico, de energia finita, pode ser representado pela série de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

As funções básicas e^{ikt} são *ondas puras de freqüência k*. Isto é, são funções periódicas, de período 2π, e em cada período ocorrem k ciclos. Neste sentido, a série de Fourier representa o sinal como superposição de ondas de freqüência k e *amplitude* $\hat{f}_k$. É importante a relação de ortogonalidade entre os elementos da base de Fourier

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ 2\pi & \text{se } n = m, \end{cases}$$

que dá origem à fórmula para os coeficientes de Fourier

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

A aplicação que associa um sinal aos seus coeficientes de Fourier

$$f \to \hat{f} = (\hat{\mathbf{f}}_k)$$

é chamada de transformada de Fourier. É verdadeira a identidade de Parserval

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Observa-se nesta identidade que a energia total do sinal é resultante das contribuições individuais de energia em cada nível de freqüência, sendo a magnitude de $\hat{f}_k$ proporcional à importância da presença da freqüência k no sinal. Por estas propriedades, diz-se que a base de Fourier $\{e^{ikt}, k \in Z\}$ forma *um sistema ortogonal completo.*

É também usual expressar a série de Fourier em termos de funções reais $\cos kt$, $\sin kt$, bastando para isto usar a fórmula

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt.$$

Nestas notas, somente a forma complexa é considerada.

Para sinais não periódicos, aplica-se a integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t},$$

em que a transformada de Fourier

$$f \to \hat{f}$$

é obtida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

Neste caso, a conservação de energia é expressa pela fórmula de Plancherel

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(\xi)]^2 d\xi.$$

Transformada de Fourier Discreta

Para sinais discretos N-periódicos $\mathbf{f}$, define-se a transformada de Fourier discreta (DFT)

$$\mathbf{f} \to \tilde{\mathbf{f}},$$

em que os coeficientes de Fourier discretos

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-ink2\pi}{N}}$$

também formam uma seqüência N–periódica. Observa-se que, no caso em que os valores f_n são as amostras de uma função 2π-periódica nos pontos t_n, iguais a $n\Delta_t$, de uma malha com espaçamento uniforme $\Delta_t = 2\pi/N$, os coeficientes de Fourier discretos $\tilde{f}_k$ podem ser interpretados como aproximações dos coeficientes de Fourier exatos $\hat{f}_k$ por meio de integração numérica pela regra dos trapézios baseada nos pontos t_n.

A seguir descrevemos como a transformada de Fourier Discreta pode ser interpretada em termos de um produto matricial. Seja

$$w_N = e^{(i2\pi)/N},$$

a N-ésima raiz da unidade e considere F_N a matriz em que a n-ésima linha é formada pelo vetor

$$\left(1, w_N^n, w_N^{2n}, \ldots, w_N^{n(N-1)}\right).$$

F_N é chamada de Matriz de Fourier de ordem N. Tendo em vista a relação de ortogonalidade discreta

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{ink2\pi}{N}} e^{\frac{-imk2\pi}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ N & \text{se } n = m, \end{cases}$$

verifica-se que F_N é invertível e que

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N}.$$

Sendo assim, é fácil verificar que

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \mathbf{f} = F_N^{-1} \mathbf{f}.$$

Desta forma, dados os coeficientes de Fourier discretos $\tilde{\mathbf{f}}$, pode-se recuperar o sinal pela fórmula

$$\mathbf{f} = F_N \tilde{\mathbf{f}},$$

que é a inversa da tranformada de Fourier discreta (IDFT). Isto quer dizer que os coeficientes de Fourier discretos são aqueles para os quais a expansão

$$I_N f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k e^{ikt}$$

interpola o sinal nos pontos t_n

$$I_N f(t_n) = f_n.$$

Transformada Rápida de Fourier

Como todos os elementos da matriz de Fourier e de sua inversa são não nulos, os cálculos das transformadas DFT e IDFT, feitos diretamente pelos produtos matriciais indicados acima, exigem um esforço computacional da ordem de N^2 multiplicações numéricas. Isto é um problema sério se N for um número grande. A partir do trabalho de Cooley e Tuckey (1965), popularizou-se um algoritmo para o cálculo rápido destas transformadas (FFT), reduzindo drasticamente o esforço computacional a $O(Nlog_2(N))$. Na realidade, as idéias simples e elegantes da FFT já haviam sido visualizadas anteriormente, inclusive pelo genial matemático alemão C. F. Gauss, em 1805, antes mesmo de Fourier. Mas, só com o impulso dado pelo desenvolvimento dos computadores, na segunda metade do século XX, é que a FFT começou a ser usada sistematicamente, possibilitando importantes inovações científicas. Atualmente é amplamente reconhecida como um dos algoritmos numéricos mais importantes de nossos tempos (cf. Cipra (2000)).

O algoritmo da FFT é baseado em uma fatoração da matriz de Fourier em temos de outras matrizes, em que a maioria dos elementos são nulos. Primeiro observa-se que se N for par, isto é, N igual a 2ℓ, então w_N^2 é igual a w_ℓ. Esta simples identidade permite expressar

$$\mathbf{f}_k = [F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_0]_k + w_N^k\ [F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_1]_k, \quad 0 \leq k \leq \ell - 1,, \tag{1}$$

em que $\tilde{\mathbf{f}}_0$ e $\tilde{\mathbf{f}}_1$ são vetores de ℓ componentes formados pelos elementos de $\tilde{\mathbf{f}}$ de índices pares e ímpares, respectivamente. Analogamente,

$$\mathbf{f}_{k+\ell} = [F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_0]_k - w_N^k\ [F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_1]_k. \tag{2}$$

Ou seja, a operação $F_N \tilde{\mathbf{f}}$, envolvendo uma matriz de Fourier de ordem N, pode ser expressa em termos de dois produtos $[F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_0]$ e $[F_\ell \tilde{\mathbf{f}}_1]$, envolvendo a matriz de Fourier de ordem ℓ, com ℓ igual a $N/2$. Como exemplo, consideremos o caso de N igual a 4. A operação $F_4 \mathbf{f}$ pode ser feita em três etapas.

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} F_2 \tilde{\mathbf{f}}_0 \\ \\ F_2 \tilde{\mathbf{f}}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Isto é equivalente à seguinte fatoração

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & i \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que F_4, em que todos os elementos são não nulos, escreve-se como produto de três matrizes em que a maioria dos elementos são zero. A ação da matriz da direita é a de fazer uma permutação sobre o vetor $\mathbf{f}$, colocando todos os elementos de índice par no início, o que não requer nenhum cálculo. Na matriz intermediária, que atua sobre o vetor permutado, reconhecem-se dois blocos na diagonal iguais a F_2. A terceira matriz, à esquerda do segundo membro, efetua as operações das fórmulas (1) e (2). De modo geral, se N é igual a 2^m, este argumento pode ser aplicado iterativamente para expressar F_N em termos do produto de matrizes esparsas com um número de elementos não nulos da ordem de $Nlog(N)$.

A seguir, aplica-se a transformada de Fourier discreta para analisar o sinal apresentado na Figura 1, que corresponde a uma série temporal horária da temperatura do ar para a estação de Cananéia, no ano de 1979, com um total de $N = 8760$ dados. Na Figura 2 está a representação em Fourier para esta série. Nesta representação a freqüência associada a cada coeficiente $\tilde{f}_k$ é dada por

$$\xi = \frac{2\pi\, k}{N}.$$

Tendo em vista a simetria $|\tilde{f}_k| = |\tilde{f}_{-k}|$, é mostrado apenas a metade do espectro, para freqüências positivas. Observando que o período é 2π vezes o inverso da freqüência, $\xi \approx 0,262$ e $\xi \approx 0,523$ correspondem ao ciclo diurno (24 horas) e semi–diurno (12 horas) da temperatura do ar, respectivamente. Para evidenciar o ciclo diurno na série temporal, na Figura 3 é apresentada a variação dessa temperatura para apenas um dia.

Teoremas de Convolução e Filtros

Um resultado importante em análise de Fourier está associado ao efeito do produto de convolução no domínio das freqüências. Precisamente,

$$\text{se} \quad w(t) = [f * g](t), \quad \text{então} \quad \hat{w}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

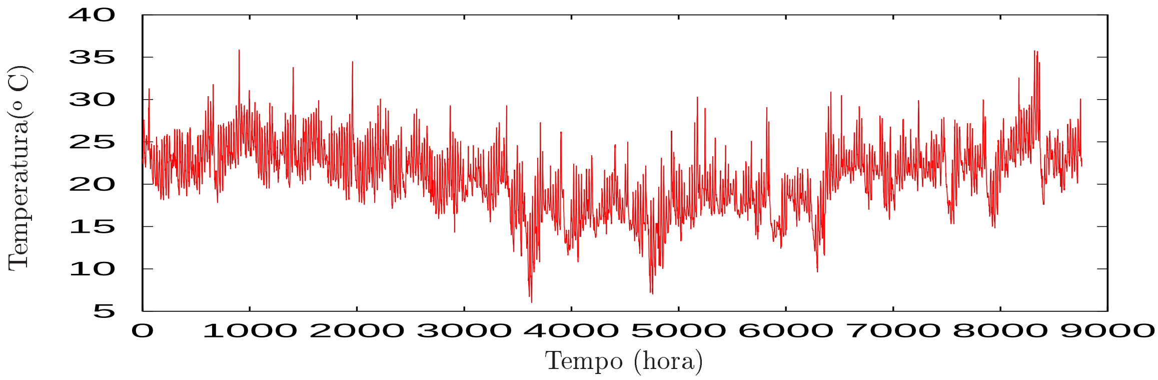


Figura 1: Série temporal de temperatura do ar para a estação de Cananénia em 1979. Fonte dos dados: Lab. Met. do IO/USP.

(a)DFT

(b) Zoom in da DFT

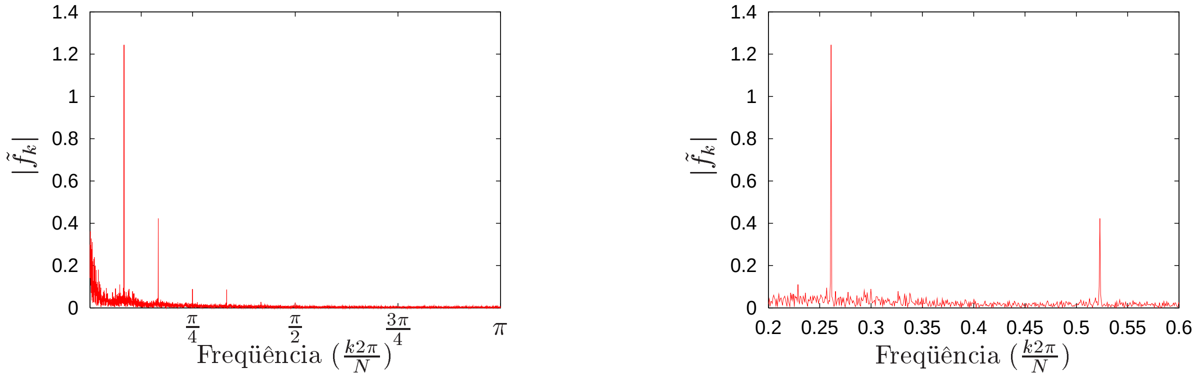


Figura 2: Transformada de Fourier para a série temporal apresentada na Figura 1.

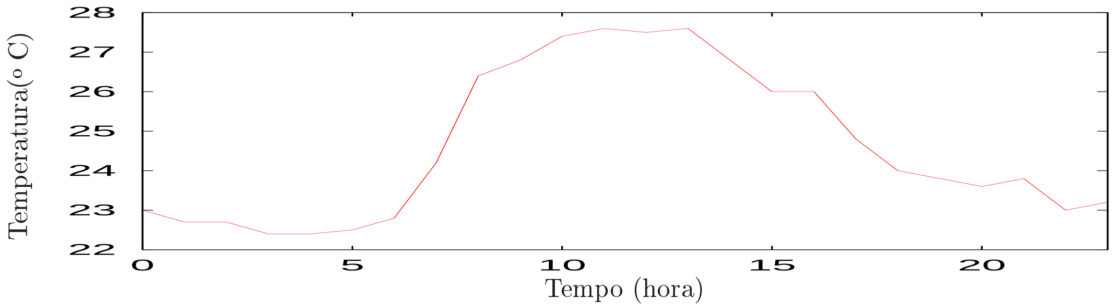


Figura 3: Série temporal de temperatura do ar, para o primeiro dia apresentado na Figura 1.

Ou seja, uma convolução, que é feita no domínio físico t, torna-se um produto usual, quando transformada para o domínio das freqüências ξ. Resultado análogo ocorre no caso de sinais periódicos. Assim, se $f(t)$ e $g(t)$ são sinais 2π-periódicos, e $w(t) = [f * g](t)$, então o teorema de convolução tem a forma

$$\hat{w}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k.$$

Já no caso da convolução de sinais discretos N-periódicos,

$$\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}, \quad \text{tem-se que} \quad \tilde{w}_k = N \tilde{f}_k \tilde{h}_k.$$

Se apenas $\mathbf{f}$ for um sinal N-periódico, o resultado da convolução $\mathbf{w}$ também é N-periódico. Neste caso vale a fórmula

$$\tilde{w}_k = \tilde{f}_k H\left(\frac{k2\pi}{N}\right),$$

em que

$$H(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ik\xi}.$$

No caso de convoluções $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}$ entre sinais discretos não periódicos, o teorema de convolução tem a forma

$$W(\xi) = F(\xi) H(\xi).$$

Estes resultados conduzem ao conceito de *filtro*. Como primeiro exemplo, considere a sequência $\mathbf{h}$ em que h_0 e h_{-1} são ambos iguais a $1/2$ e h_k é igual a zero para k maior do que zero e menor do que -1. Assim sendo, a convolução $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}$ tem a seguinte fórmula

$$w_k = \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{2} f_{k+1}.$$

Ou seja, $\mathbf{w}$ é a média entre o sinal $\mathbf{f}$ e sua translação $S_{-1}\mathbf{f}$. Se o sinal não oscilar muito, de tal forma que $\mathbf{f}$ seja parecido com sua versão translada $S_{-1}\mathbf{f}$, então o resultado da convolução não difere muito do sinal original. No entanto, este não é o caso quando o sinal $\mathbf{f}$ for muito oscilante. Por exemplo, se o sinal for de tal forma que f_k seja igual a $-f_{k+1}$, então o resultado da convolução $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}$ é nulo. Este fato pode ser explicado pela análise do comportamento de

$$H(\xi) = \frac{1}{2}\left[1 + e^{i\xi}\right] = e^{i\frac{\xi}{2}} \cos\frac{\xi}{2}.$$

Como pode ser observado na Fig. 4 (a), a função 2π-periódica $H(\xi)$ anula-se para ξ igual a $\pm\pi$ e é aproximadamente igual a 1 na vizinhança de $\xi = 0$. Por isto, $H(\xi)$ é conhecido como um *filtro passa baixa*. Isto significa que para o sinal $\mathbf{w}$, resultado da convolução de $\mathbf{h}$ com um sinal N-periódico $\mathbf{f}$, a amplitude de $\tilde{w}_k$ é aproximadamente igual a $\tilde{f}_k$ para as freqüências baixas, o que está associado a $H(k2\pi/N)$ ser próximo de 1. Por outro lado, as freqüências altas, para $|k|$ próximo de $N/2$, presentes em $\mathbf{f}$, serão atenuadas ou até canceladadas após a convolução com $\mathbf{h}$.

Analogamente, o conceito de um filtro *passa alta* é atribuído a filtros $\mathbf{g}$ tais que $G(0)$ é igual a 0 e $G(\xi)$ é próximo de 1, para ξ próximo de π. Pelo teorema de convolução, ao fazer a convolução de um sinal com um filtro passa alta, no resultado as componentes de freqüências altas permanecem enquanto que aquelas de freqüências baixas são atenuadas. Por exemplo, considere o filtro

$$G(\xi) = -ie^{i\frac{\xi}{2}} \sin\frac{\xi}{2},$$

cujos coeficientes $\mathbf{g}$ são dados por

$$g_0 = -g_{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g_k = 0 \quad \text{para } k > 0 \text{ e } k < -1.$$

Assim sendo, a convolução $\mathbf{w}$ de $\mathbf{f}$ com $\mathbf{g}$ tem a seguinte fórmula

$$w_k = \frac{1}{2} f_k - \frac{1}{2} f_{k+1}.$$

Ou seja, $2\mathbf{w}$ é a diferença entre o sinal $\mathbf{f}$ e sua translação $S_{-1}\mathbf{f}$. Se o sinal for suave, de tal forma que $\mathbf{f}$ seja parecido com sua versão translada $S_{-1}\mathbf{f}$, então o resultado desta diferença deve ser pequeno. De outra maneira, se o sinal $\mathbf{f}$ for muito oscilante, de tal forma que $\mathbf{f}$ está próximo a $-S_{-1}\mathbf{f}$, resulta que $\mathbf{w}$ está próximo a $\mathbf{f}$. Este comportamento é explicado pelo teorema de convolução, tendo em vista que $G(0)$ e $G(\pi)$ são iguais a zero e um, respectivamente, como pode ser observado na Fig. 4 (b).

(a) $|H(\xi)|$ (b) $|G(\xi)|$

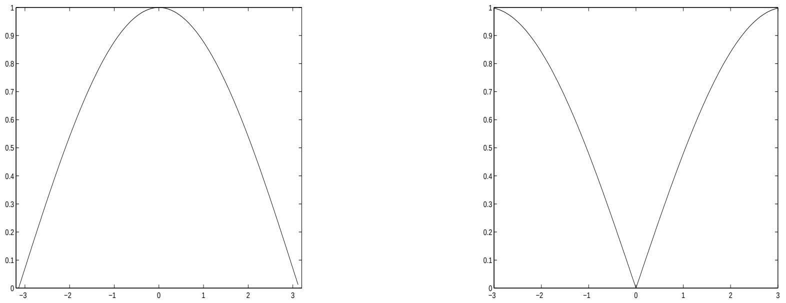


Figura 4: Filtros passa-baixa $H(\xi)$ e passa-alta $G(\xi)$

A seguir são dados outros exemplos de filtros passa-baixa e passa alta. Na Fig. 5 (c) está o gráfico de $|H(\xi)|$, cujos coeficientes são

$$\begin{aligned} h(k) &= 0, \quad k \le -5, \\ h(-4) &= 3/256, \\ h(-3) &= -3/256, \\ h(-2) &= -22/256, \\ h(-1) &= 22/256, \\ h(0) &= 128/256, \\ h(k) &= h(1-k), \quad k > 0, \end{aligned}$$

que resulta ser um filtro passa-baixa. Na Fig. 5 (e) está $|G(\xi)|$, igual a $|H(\xi + \pi)|$, que corresponde a um filtro passa alta. Para N igual a 512, considera-se o sinal N-periódico $f(n2\pi/N)$, definido por amostras da função

$$f(t) = \cos t + \frac{1}{4} \cos 250t.$$

Como pode ser visto na Fig. 5 (a), $f(t)$ é a superposição de duas ondas: uma onda de freqüência baixa, k igual a 1 e amplitude 1 e outra de freqüência alta, k igual a 250, e amplitude 1/4. Levando em consideração que

$$\cos\omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2},$$

então a DFT do sinal resulta ser

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} 1/2 & |k| = 1 \\ 1/8 & |k| = 250 \\ 0 & \text{nos demais casos,} \end{cases}$$

como indicado na Fig. 5 (b). Ao fazer a convolução $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}$, observa-se que em $\mathbf{w}$ permanece apenas a componente de freqüência baixa, uma vez que o filtro H anula a componente de alta freqüência. Analogamente, a convolução $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{g}$ só contém a componente de alta freqüência, tendo em vista que o filtro $G(\xi)$ cancela as freqüências baixas de $\mathbf{f}$.

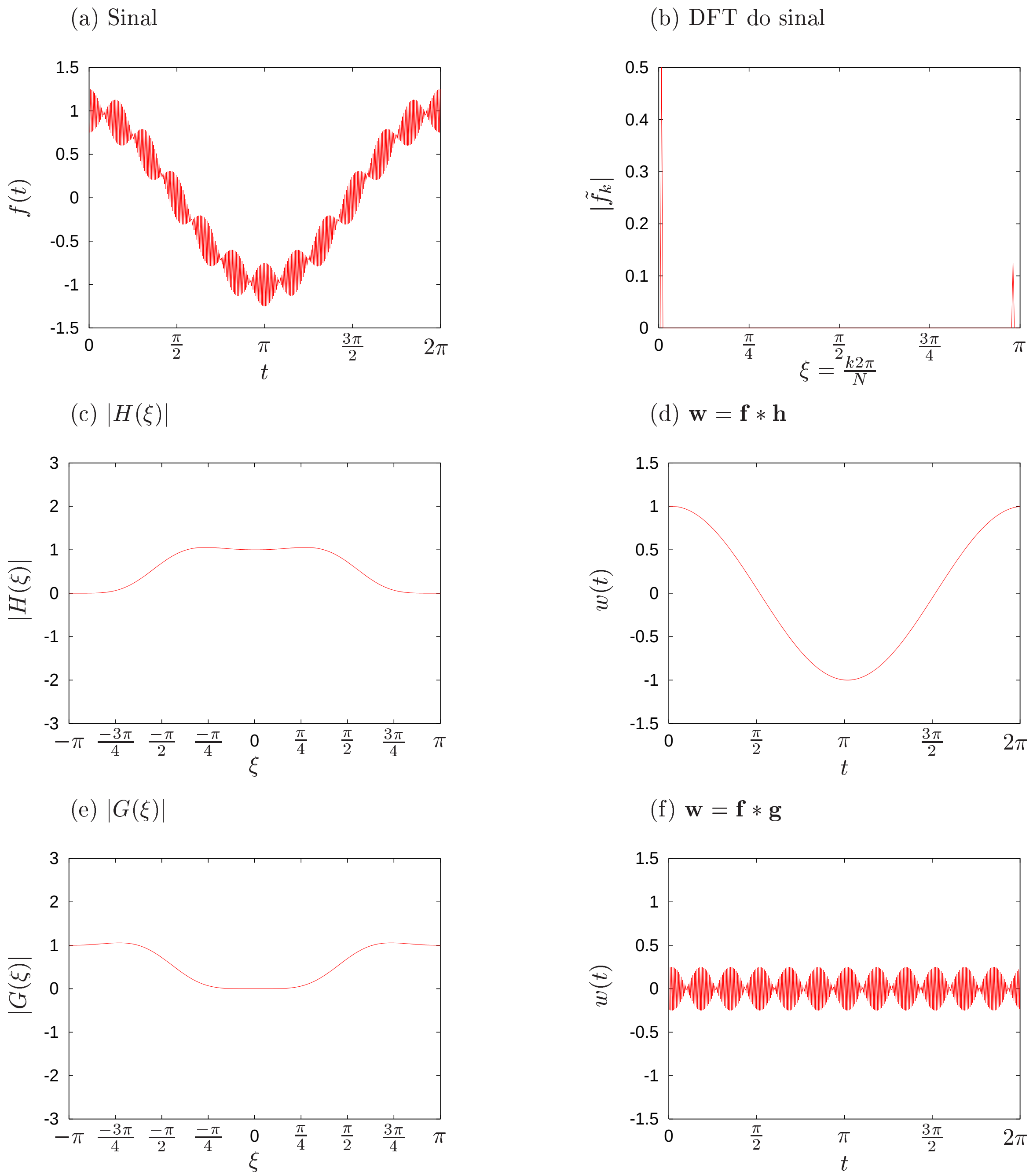


Figura 5: Convoluções com filtros passa-baixa e passa-alta

Análise Wavelet

Em análise wavelet, os sinais são representados por séries do tipo

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi_k^j(t),$$

em que as funções básicas

$$\psi_k^j(t) = \psi(2^j t - k)$$

são chamadas de wavelets. Existem vários tipos de wavelets, dependendo da escolha da wavelet mãe $\psi(t)$. Para facilitar a compreensão dos conceitos básicos, é conveniente começar com um exemplo simples.

Wavelet de Haar

O exemplo mais simples é o da wavelet de Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

cujo gráfico está na Fig. 6 (a). A transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ da wavelet de Haar é dada pela fórmula

$$\hat{\psi}(\xi) \quad = \quad \frac{1}{i\xi}[1 - e^{-i\frac{\xi}{2}}]^2.$$

Observa-se que $\hat{\psi}(\xi)$ se anula em ξ igual a zero, como mostra a Fig. 7 (a).

É facil verificar que as wavelets de Haar formam um sistema ortogonal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j t - k)\psi(2^l t - n)dt = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq l \text{ ou } k \neq n \\ 2^{-j} & \text{se } j = l \text{ e } k = n, \end{cases}$$

que dá origem à fórmula para os coeficientes wavelet

$$d_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^j t - k)dt.$$

A transformada wavelet é a aplicação que associa um sinal aos seus coeficientes wavelet

$$f \to f^w = (d_k^j)$$

Também vale a identidade de Parserval (conservação de energia)

$$\int [f(t)]^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j} |d_k^j|^2.$$

De modo geral, as wavelets possuem duas características fundamentais:

- *Localização temporal:* A wavelet mãe é localizada em um intervalo finito, com comprimento Δt. Desta forma, à medida que j aumenta, a wavelet $\psi_k^j(t)$ fica localizada em intervalos de comprimento cada vez menores $\Delta^j t$ iguais a $\Delta_t 2^{-j}$. Os índices k indicam os pontos $(k + 1/2)2^{-j}$ em torno dos quais as wavelets $\psi_k^j(t)$ estão centralizadas. Assim, em cada nível de escala j, todas as wavelets possuem a mesma forma, só mudando os pontos de localização, que diferem por um múltiplo inteiro da escala 2^{-j}.

- *Localização freqüencial:* Tipicamente, a transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ é uma função que se anula para ξ igual a zero. Para ξ maior do que zero, a energia se concentra em uma região limitada Ω de comprimento $\Delta\xi$. Desta forma, em operações de convolução, $\hat{\psi}(\xi)$ pode ser interpretada como um filtro *passa-banda*, que privilegia as freqüências ξ em Ω. Fazendo mudança de escala, resulta que $\hat{\psi}(2^{-j}\xi)$ também é um filtro passa banda, com localização em regiões Ω^j, com largura de banda $\Delta^j\xi$ proporcional a 2^j.

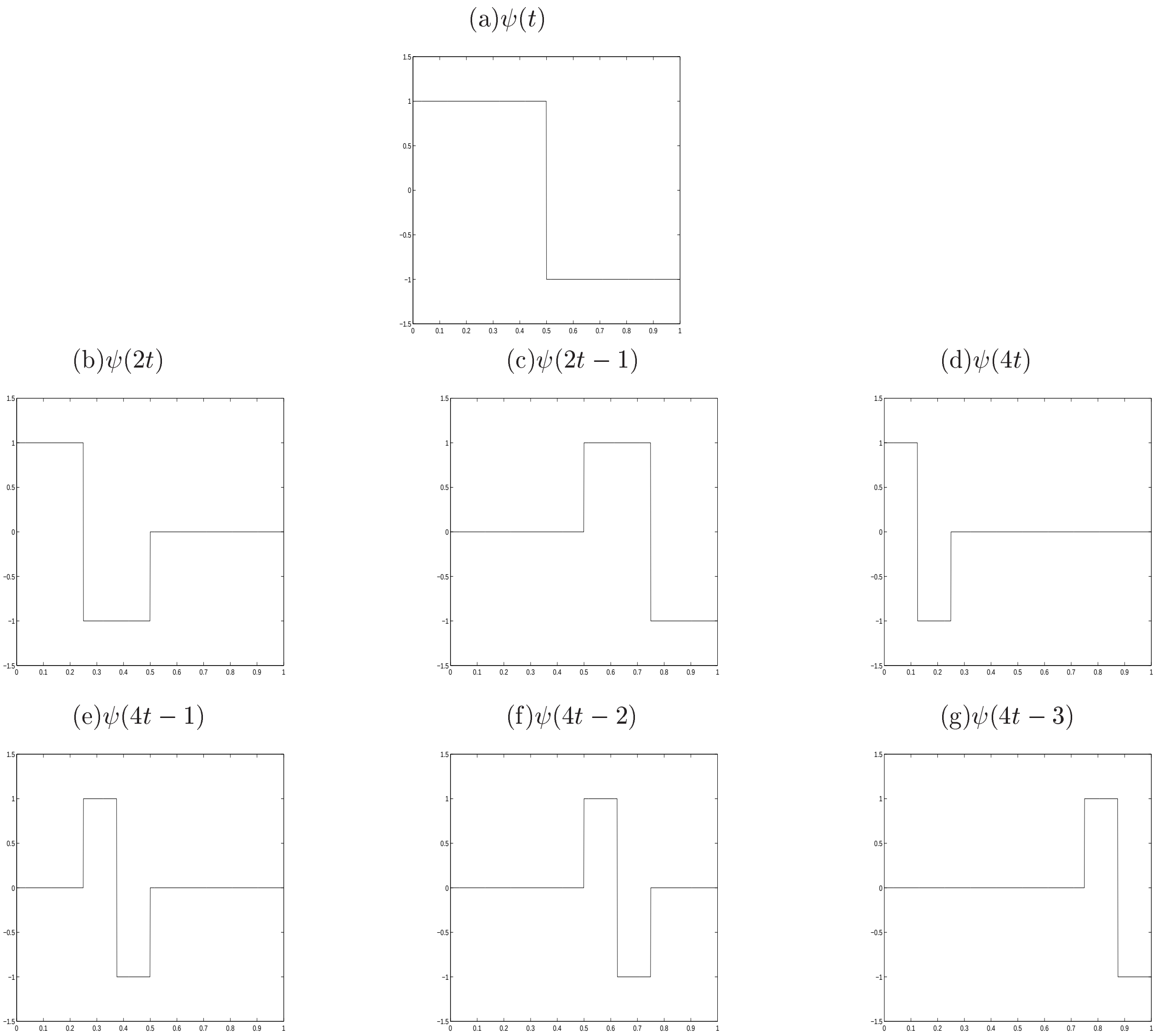


Figura 6: Wavelets de Haar

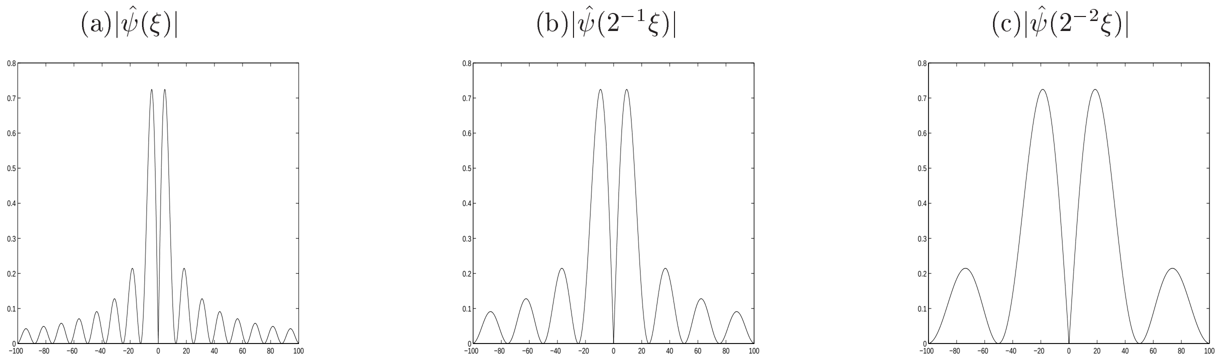


Figura 7: Transformada de Fourier das Wavelets de Haar

Tendo em vista as propriedades de dupla localização das wavelets, tanto no domínio temporal quanto no domínio das freqüências, percebe-se que os coeficientes wavelet d_k^j são uma medida do conteúdo frequëncial de f associado às freqüências ξ em Ω^j que ocorrem no suporte de $\psi_k^j(t)$. Neste sentido, a transformada wavelet é do tipo *local em tempo-freqüência*, com resoluções temporal e freqüencial inversamente proporcionais

$$\Delta^j t \times \Delta^j \xi = \text{constante}.$$

como ilustrado na Fig. 8.

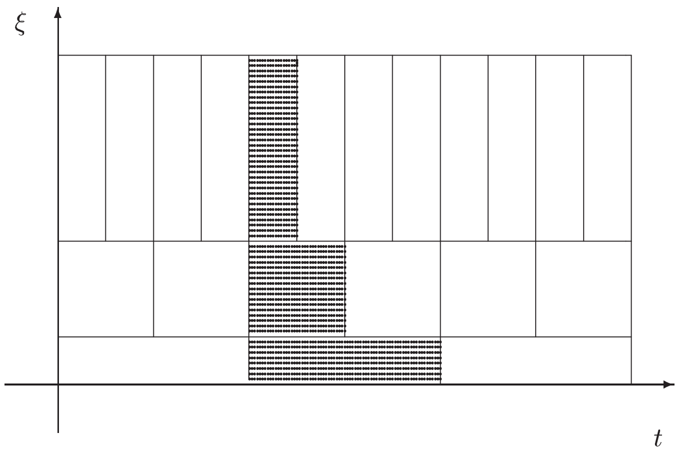


Figura 8: Plano $t \times \xi$

Algoritmos de Análise e Síntese: Banco de Filtros

Usando a fórmula da wavelet de Haar, verifica-se que os coeficientes wavelet podem ser obtidos pela expressão

$$d_k^j = 2^j \left[\int_{k2^{-j}}^{(k+1/2)2^{-j}} f(t)dt - \int_{(k+1/2)2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} f(t)dt \right].$$

Definem-se os valores

$$\bar{f}_n^{j+1} = 2^{j+1} \int_{n2^{-j-1}}^{(n+1)2^{-j-1}} f(t)dt$$

que representam as médias do sinal $f(t)$ nos intervalos $[n2^{-j-1}, (n+1)2^{-j-1}]$. Interpretam-se as médias $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$ como valores discretos do sinal na escala 2^{-j-1}. Desta forma, tem-se que

$$d_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} - \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right]. \tag{3}$$

Ou seja, conhecendo-se as médias celulares de f no nível $j+1$, obtém-se os coeficientes wavelets do nível j. Além disto, também é facil verificar que as médias celulares do nível j podem ser obtidas a partir das médias do nível superior pela fórmula

$$\bar{f}_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} + \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right]. \tag{4}$$

As fórmulas (3) e (4) são chamadas de decomposição ou análise. É fácil reconhecer que elas podem ser expressas como operadores de convolução. De fato,

$$d_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{g}^*]_{2k} \tag{5}$$

$$\bar{f}_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{h}^*]_{2k}, \tag{6}$$

em que

$$g^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & k = -1 \\ \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases} \qquad h^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \\ \frac{1}{2} & k = -1 \\ \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Como descrito anteriormente, por fazer médias, o filtro $H^*(\xi)$ é do tipo passa baixa. Portanto, as médias celulares $\bar{\mathbf{f}}^j$ são uma versão suavizada das médias $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$, em que foram filtrados detalhes de alta freqüência do nível $j+1$ que não podem ser representados no nível inferior j. Já o filtro $G^*(\xi)$, for fazer diferenças, é do tipo passa alta. Por isto, os coeficientes $\mathbf{d}^j$ contém aqueles detalhes de alta freqüência entre os níveis j e $j+1$.

O processo inverso também é simples, tendo em vista as fórmulas

$$\bar{f}_{2k}^{j+1} = [\bar{f}_k^j + d_k^j] \tag{7}$$

$$\bar{f}_{2k+1}^{j+1} = [\bar{f}_k^j - d_k^j]. \tag{8}$$

Este processo é chamado de síntese ou reconstrução, e também pode ser expresso em forma de convoluções da seguinte maneira

$$\bar{f}_k^{j+1} = 2\left\{\sum_n \bar{f}_n^j h_{k-2n} + \sum_n \bar{f}_n^j g_{k-2n}\right\}, \tag{9}$$

em que

$$h_k = h^*_{-k}, \qquad g_k = g^*_{-k}.$$

Isto é, os filtros de análise e de síntese são conjugados

$$H^*(\xi) = \overline{H(\xi)} \quad \text{e} \quad G^*(\xi) = \overline{G(\xi)}.$$

Observa-se que cada um dos somatórios do lado direito da igualdade acima são convoluções dos filtros h e g com um sinal que é formado pelas médias $\bar{f}_k^j$ colocadas nas posições de índice par $2k$ e intercaladas com zeros, nas posições de índice ímpar.

O algoritmo que efetua as operações de análise está esquematizado pela estrutura de bancos de filtros apresentada na primeira metade da Fig. 9 (a). Nessa figura, o quadrado indica convolução com um filtro, cujo nome está indicado no interior do quadrado. O símbolo $2\downarrow$ indica um *downsampling* ou decimação, isto é, são eliminados os elementos de índice ímpar. Assim, dado o vetor $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$, obtém–se um novo vetor $\bar{\mathbf{f}}^j$ pela aplicação de uma convolução entre $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$ e o filtro passa baixa $\mathbf{h}$ seguida de decimação. A diferença de informação entre $\bar{\mathbf{f}}^j$ e $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$, ou seja, os detalhes de alta frequência, ficam guardados no vetor $\mathbf{d}^j$, que é obtido pela convolução entre $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$ e o filtro passa alta $\mathbf{g}$, seguida de uma decimação.

Na segunda metade da Fig. 9 (b), está esquematizado o processo inverso. O símbolo $2\uparrow$ indica um *upsampling*, isto é, são acrescentados componentes com valor zero entre as componentes do vetor original.

Os processos de análise e síntese, descritos, podem ser repetidos em vários níveis consecutivos para definir a transformada wavelet discreta

$$\mathrm{DWT} = \mathrm{DWT}_{j_0}^{j+1}$$

e sua inversa

$$\mathrm{IDWT} = \mathrm{IDWT}_{j_0}^{j+1}.$$

Isto é

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{\,j+1}\} \underset{IDWT}{\overset{DWT}{\rightleftarrows}} \{\bar{\mathbf{f}}^{\,j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \cdots, \mathbf{d}^j\}$$

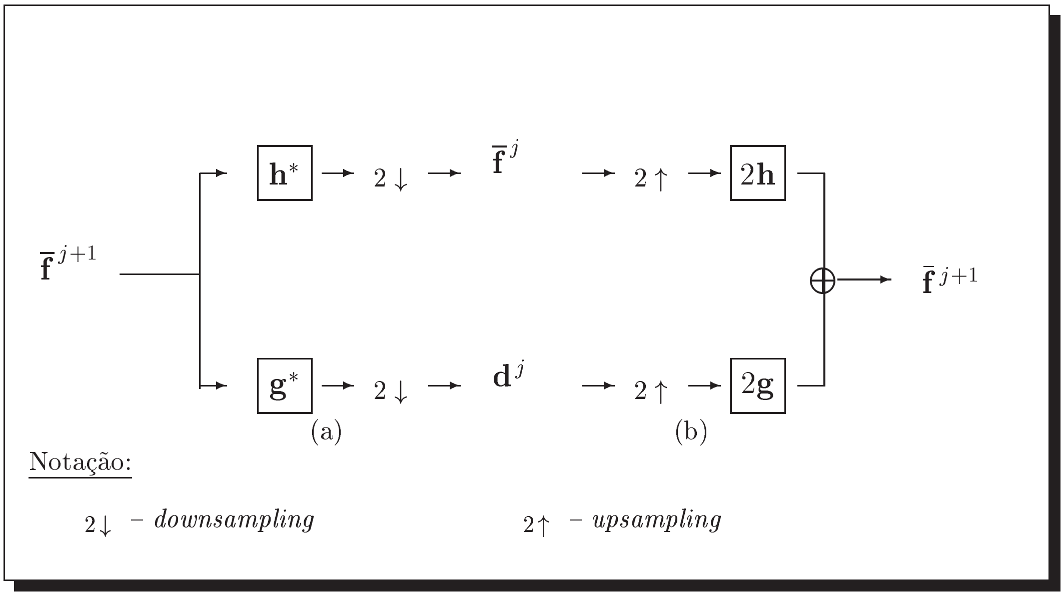


Figura 9: Arquitetura de banco de filtros para a transformada wavelet: (a) análise e (b) síntese.

Wavelets Ortogonais de Daubechies

Existem uma infinidade de outros exemplos de wavelets com características semelhantes às da wavelet de Haar. Para definir estas wavelets os principais ingredientes são os filtros $H(\xi)$ e $G(\xi)$, que dão origem ao banco de filtros dos algoritmos de análise e síntese. De modo geral, para se ter um banco de filtros com reconstrução perfeita, como indicado nos diagramas da Fig. 9, $H(\xi)$ e $G(\xi)$ precisam satisfazer certas condições. É necessário que o filtro passa baixa $H(\xi)$ seja tal que

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = 1, \quad \text{para todo} \quad \xi. \tag{10}$$

Sendo assim, o filtro passa alta é definido por

$$G(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H(\xi+\pi)}.$$

Em termos de seus coeficientes, isto quer dizer que

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

Neste sentido, o par de filtros $\{H(\xi), G(\xi)\}$ são denominados de *quadrature mirror filters*. Como foi mostrado, este é o caso dos filtros de Haar, em que

$$H(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \cos\frac{\xi}{2}.$$

Portando, para construir novos bancos de filtros a primeira providência a ser tomada é encontrar um filtro passa baixa $P(\xi)$ que seja maior ou igual a zero e que satisfaça

$$P(\xi) + P(\xi+\pi) = 1 \quad \text{para todo} \quad \xi,$$

e em seguida determinar $H(\xi)$ tal que

$$|H(\xi)|^2 = P(\xi).$$

Felizmente, existem vários filtros $P(\xi)$ com tais propriedades, denominados filtros de interpolação. Os mais populares são os filtros associados a interpolação polinomial de Lagrange. Para cada inteiro par M, igual a $2K$, tem-se $P_M(\xi)$, definido por

$$P_M(\xi) = (\cos\frac{\xi}{2})^M \sum_{m=0}^{K-1} \left(\begin{array}{c} K-1+m \\ m \end{array} \right) (\sin\xi/2)^{2m}, \quad K \geq 1. \tag{11}$$

Os filtros $H_K(\xi)$, tais que

$$|H_K(\xi)|^2 = P_{2K}(\xi)$$

são os renomados filtros ortogonais de Daubechies, sendo $H_1(\xi)$ o caso particular do filtro de Haar. Os coeficientes desses filtros são nulos para k menor do que zero e para k maior ou igual a $2K$. A Tabela 1 contém esses coeficientes para K igual a $2, 3$ e 4.

Tabela 1: **Coeficientes dos Filtros Ortogonais de Daubechies.**

	$K = 2$	$K = 3$	$K = 4$
k	$h(k)$	$h(k)$	$h(k)$
0	0.341506350946110	0.235233603892082	0.162901714025649
1	0.591506350946109	0.570558457915722	0.505472857545914
2	0.158493649053890	0.325182500263116	0.446100069123380
3	-0.0915063509461096	-0.0954672077841637	-0.0197875131178224
4		-0.0604161041551981	-0.132253583684520
5		0.0249073356548795	0.0218081502370886
6			0.0232518005354909
7			-0.00749349466518071

Para cada filtro de Daubechies $H_K(\xi)$ existe uma wavelet mãe $\psi_K(t)$. Como no caso da wavelet de Haar, escolhendo $\psi(t)$ como uma das wavelets de Daubechies, determina-se uma análise wavelet que permite representar sinais por suas séries de wavelets. As wavelets básicas $\psi_k^j(t)$ também formam um sistema ortogonal completo e, de forma análoga, têm-se os coeficientes wavelet de Daubechies

$$d_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^j t - k)dt.$$

De modo geral, todas as propriedades descritas anteriormente para o caso de Haar também são verdadeiras no caso das wavelets de Daubechies. No entanto, algumas adaptações fazem-se necessárias.

Em análise wavelet, exitem duas formas de representar os sinais. A primeira, utiliza discretizações em um único nível de escala $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$. A outra é a representação em multi-nível $\{\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \cdots, \mathbf{d}^j\}$. A mudança de uma representação para a outra é feita pelos algoritmos de análise DWT e de síntese IDWT, representados em termos de um banco de filtros. No caso de Haar, as amostras $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}$ são dadas por médias celulares. De modo geral, elas devem ser interpretadas como sendo médias ponderadas do tipo

$$\bar{f}_k^{j+1} = 2^{j+1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(2^{j+1}t - k)dt.$$

A função $\phi(t)$ é chamada de função de escalonamento. No caso de Haar, $\phi(t)$ é simplesmente a função indicadora do intervalo $[0, 1)$, isto é,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ 0, & t \notin [0,1). \end{cases}$$

As funções de escalonamento de Daubechies não possuem uma fórmula tão simples. Na verdade elas são definidas implicitamente pela relação de escala

$$\phi(t) = 2\sum_k h_k \phi(2t - k),$$

em que h_k são os coeficientes do filtro $H_K(\xi)$ correspondente. Pode ser mostrado que o suporte de ϕ é o intervalo $[0, 2K-1]$, cujo tamanho aumenta com o parâmetro K. Em cada escala, as funções $\{\phi(2^j t - k)\}$ também formam uma família ortogonal. A relação entre a função de escalonamento e a wavelet é expressa por

$$\psi(t) = \sum_k g_k \phi(2t - k).$$

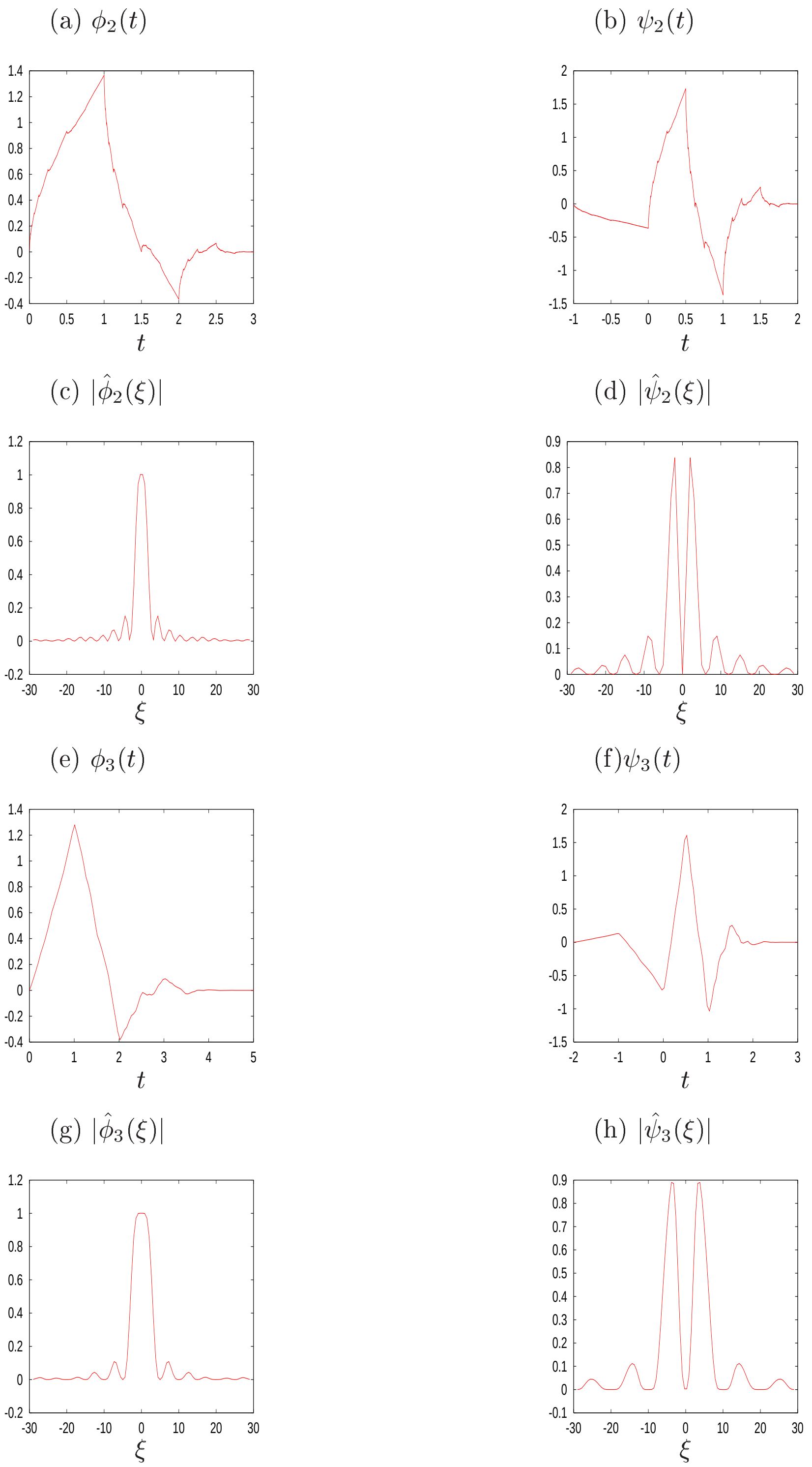


Figura 10: Funções de escalonamento e wavelets de Daubechies para $K = 2$ e 3.

São apresentadas na Fig. 10 as funções de escalonamento e wavelets de Daubechies para K igual a 2 e 3, com suas respectivas transformadas de Fourier. Maiores detalhes sobre a construção e propriedades dessas funções podem ser encontrados em Daubechies (1992). Observa-se que, ao contrário do caso de Haar, as wavelets e funções de escalonamento de Daubechies são funções suaves. De fato, a suavidade das wavelets de Daubechies aumenta com o parâmetro K. Em contrapartida, o seu suporte fica cada vez maior. Já no domínio de freqüências, a localização das wavelets de Daubechies é significativamente melhor do que das wavelets de Haar.

Para analisar o efeito da propiedade de dupla localização das wavelets, no domínio temporal e da frequência, considera-se na Fig. 11 uma função definida no intervalo $[0, 1000]$ e composta de dois tipos de movimentos oscilatórios justapostos. Primeiramente, tem-se uma onda de baixa freqüência ($\xi = \pi/100$) na metade do intervalo, enquanto que na segunda metade do intervalo tem-se outra onda com freqüência dez vezes superior. Usando a wavelet de Daubechies com K igual a 2, mostra-se o resultado da DWT deste sinal em 5 níveis. Pode-se observar como os coeficientes wavelet indicam a região de transição entre esses movimentos. A transformada de Fourier não é capaz de reconhecer essa região de transição. Nela apenas a presença das freqüências envolvidas é detectada, sem nenhuma informação sobre a localização espacial dessas freqüências, como indicado na Figura 11. Na Fig. 11, também podem ser observados os efeitos dos filtros passa baixa e passa alta quando a onda de frequência mais alta é removida do sinal no penúltimo passo, sendo transferida para a componente wavelet.

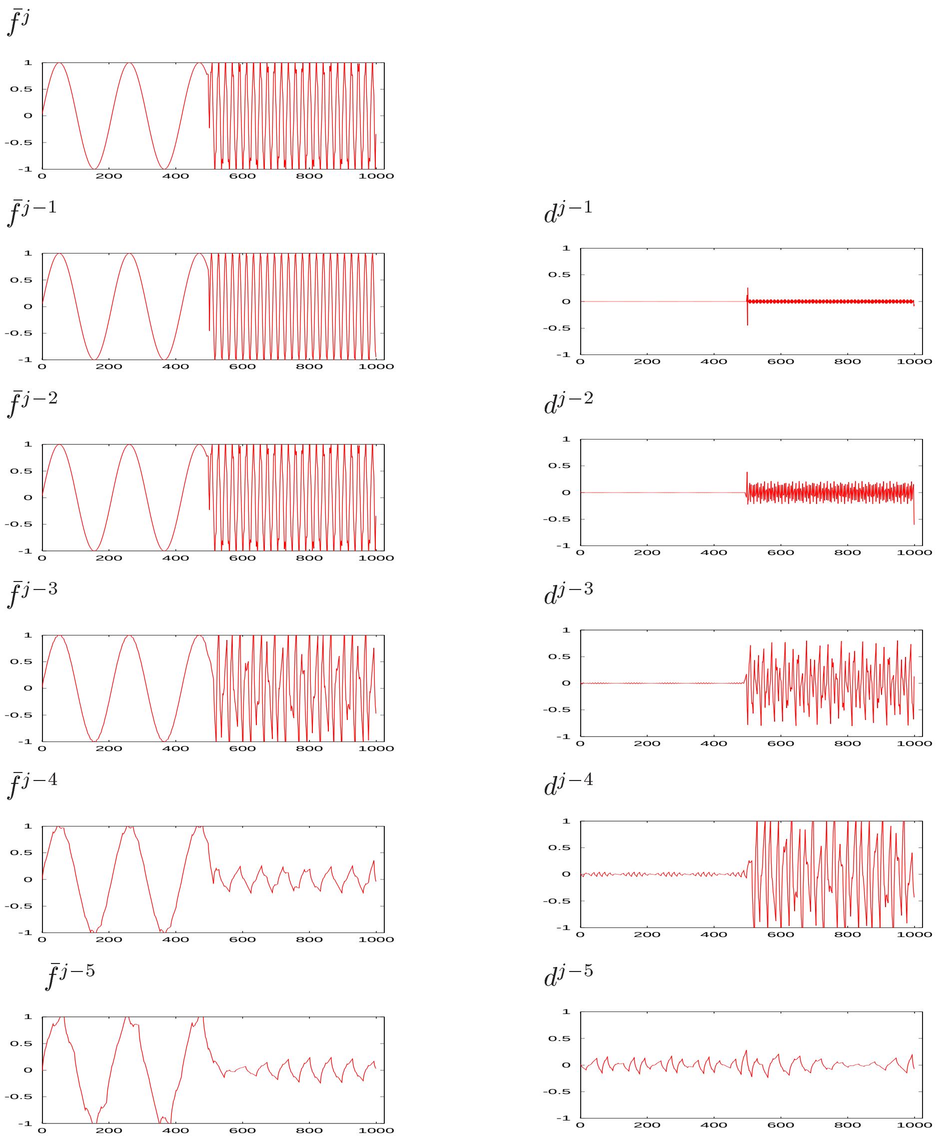


Figura 11: Representação de uma função oscilatória com freqüências baixas e altas espacialmente deslocadas e sua DWT para a wavelet de Daubechies com $K = 2$.

⋆ **Momentos Nulos: Cancelamento de Polinômios**

Em análise wavelet, um parâmetro muito importante é a ordem $p + 1$ com que um filtro passa baixa $H(\xi)$

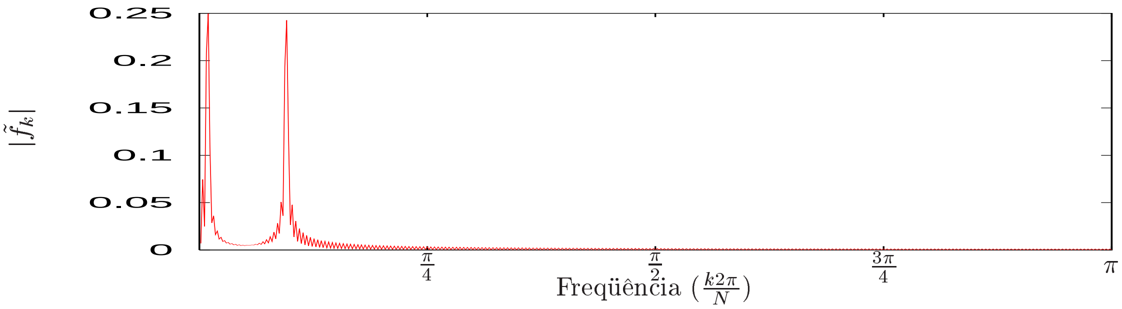


Figura 12: DFT do sinal da Figura 11.

se anula em π, que é a mesma ordem com que o filtro passa alta associado

$$G(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H(\xi + \pi)}$$

se anula em zero. Neste caso, diz-se que o filtro $G(\xi)$ possui $p + 1$ momentos nulos. Pode–se verificar que o número de momentos nulos de $G(\xi)$ é igual ao número de momentos nulos da wavelet associada $\psi(t)$, isto é, a ordem com que a transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ se anula na origem. Assim sendo, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^s \psi(t) dt = 0 \;\; 0 \leq s \leq p.$$

Isto significa que os coeficientes wavelet dos polinômios de grau menor ou igual a p são todos nulos. Esta propriedade de cancelamento de polinômios é fundamental nas principais aplicações de wavelets. Daí a importância em se trabalhar com wavelets que possuem vários momentos nulos.

No caso dos filtros de Daubechies $H_K(\xi)$, a ordem é K. Por isto, diz-se que a wavelet de Daubechies associada possui K momentos nulos.

⋆ **Caracterização local de regularidade**

Como indicado no teorema a seguir, uma importante característica dos coeficientes wavelet d_k^j é que a sua ordem de grandeza está associada ao grau de suavidade da função f no suporte de ψ_k^j, e ao número de momentos nulos da wavelet ψ.

Seja $p+1$ o número de momentos nulos de ψ. Se f for uma função com derivada $f^{(s)}$ contínua no supporte de ψ_k^j, $0 \leq s \leq p+1$, então o coeficiente wavelet $d_k^j = \langle f, \psi_k^j \rangle$ satisfaz a estimativa

$$|d_k^j| \leq \;\; C \;\; 2^{-j(s+1/2)} \;\; \| f^{(s)} \|_\infty \tag{12}$$

em que C é uma constante que depende de ψ e $\| f^{(s)} \|_\infty$ é a norma do máximo de $f^{(s)}$ no suporte de ψ_k^j.

Portanto, os coeficientes wavelet podem ser usados como indicadores locais de regularidade das funções analisadas, pois tipicamente são pequenos em regiões de suavidade e maiores em regiões com singularidade. Por essa razão, expansões em wavelets possuem a vantagem de poderem ser econômicas para uma classe bem ampla de funções, como por exemplo, no caso de uma função suave por partes, como ilustrado na Fig. 13. Pode ser visto na representação no plano posição × escala, que a maioria dos coeficientes wavelet são deprezíveis e podem ser desconsiderados. Esse é um dos princípios básicos na maioria das aplicações de wavelets.

Compressão de Dados

Como visto nas seções anteriores, representações compactas podem ser realizadas no contexto de Análise Wavelet, em termos dos coeficientes wavelet significativos. O princípio básico utilizado é a caractrização local de regularidade em termos do decaimento dos coeficientes wavelet e a principal estratégia é definida por um esquema de truncamento.

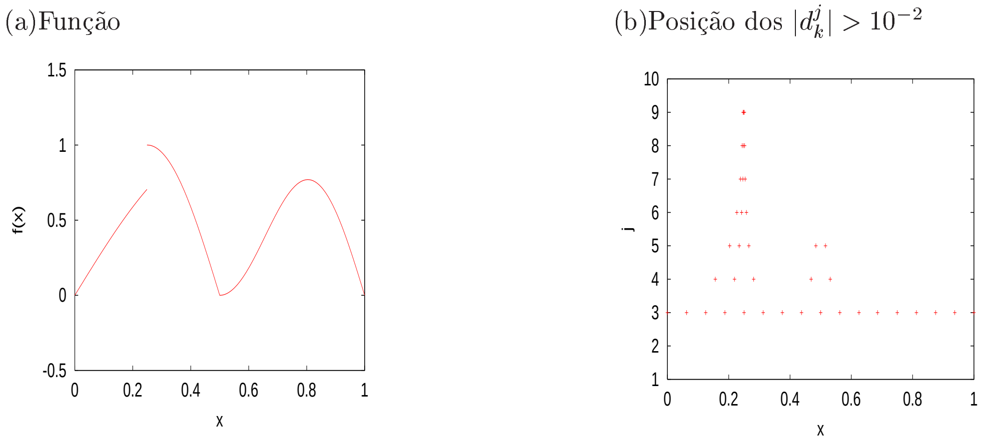


Figura 13: Exemplo da localização dos coeficientes wavelets significativos.

⋆ **Agoritmo de Compressão de Dados**

- **Input:** $\bar{\mathbf{f}}^{j+1}, \epsilon$
- **Passo 1: Análise**

$$\bar{\mathbf{f}}^{j+1} \overset{DWT}{\longrightarrow} \bar{\mathbf{f}}_{MR}^{j+1} = (\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \ldots \mathbf{d}^{j}).$$

- **Passo 2: Truncamento**

$$d_{\epsilon,k}^{\ell} = \begin{cases} d_k^{\ell} & \text{se } |d_k^{\ell}| > \epsilon \\ 0 & \text{se } |d_k^{\ell}| \leq \epsilon \end{cases}$$

- **Output:** $\bar{\mathbf{f}}_{\epsilon,MR}^{j+1} = (\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}_{\epsilon}^{j_0}, \ldots \mathbf{d}_{\epsilon}^{j}).$

A seguir são mostrados alguns exemplos da aplicação da transformada wavelet na compressão de imagens. Imagens podem ser pensadas como sinais bidimensisonais $\bar{\mathbf{f}}^{j+1} = (f_{k,\ell}^{j+1})$. Os algoritmos de análise e síntese da transformada wavelet bidimensional também possuem uma estrutura de bancos de filtros, similar ao caso unidimensional. Porém, neste caso, os dados de entrada formam uma matriz e as convoluções, *downsampling* e *upsampling* são efetuadas nas linhas e colunas dessa matriz. O *downsampling* de linhas consiste em retirar as linhas de índice ímpar. O *upsampling* de linhas é o processo de se introduzir linhas com elementos zero entre as linhas da matriz de entrada. Isto é feito de forma que essas novas linhas ocupem os índices ímpares da matriz resultante. Um procedimento análogo é efetuado nos *downsampling* e *upsampling* de colunas. A arquitetura de banco de filtros da transformada wavelet bidimensional pode ser visualizada nas Figuras 14 (análise) e 15 (síntese). As operações realizadas nas colunas estão representadas por um traçado descontínuo e as realizadas nas linhas por um contínuo.

Observa-se que no caso bidimensional existem três tipos de coeficientes wavelets. O $\mathbf{d}^{j(1)}$ é obtido após a aplicação do filtro passa baixa nas linhas e passa alta nas colunas. Portanto, ele contém apenas os detalhes na direção vertical. De maneira análoga, $\mathbf{d}^{j(2)}$ contém os detalhes na direção horizontal, enquanto que $\mathbf{d}^{j(3)}$ contém aqueles detalhes que existem tanto na direção horizontal quanto vertical.

Na Figura 16 está apresentado um exemplo de compressão de uma imagem do satélite Meteosat do canal infravermelho curto sobre a América do Sul. Primeiro foi aplicada na imagem original, à esquerda, a DWT de Daubechies, com $K = 2$ e os coeficientes com magnitude inferior a $\epsilon = 100$ foram anulados. do total de coeficientes originais, apenas $\approx 2\%$ foram mantidos. A seguir aplicou-se a IDWT e recuperou-se a imagem da direita. Na Figura 17 é apresentado um histograma que ilustra como a percentagem de coeficientes wavelet se distribui em diferentes faixas de magnitude.

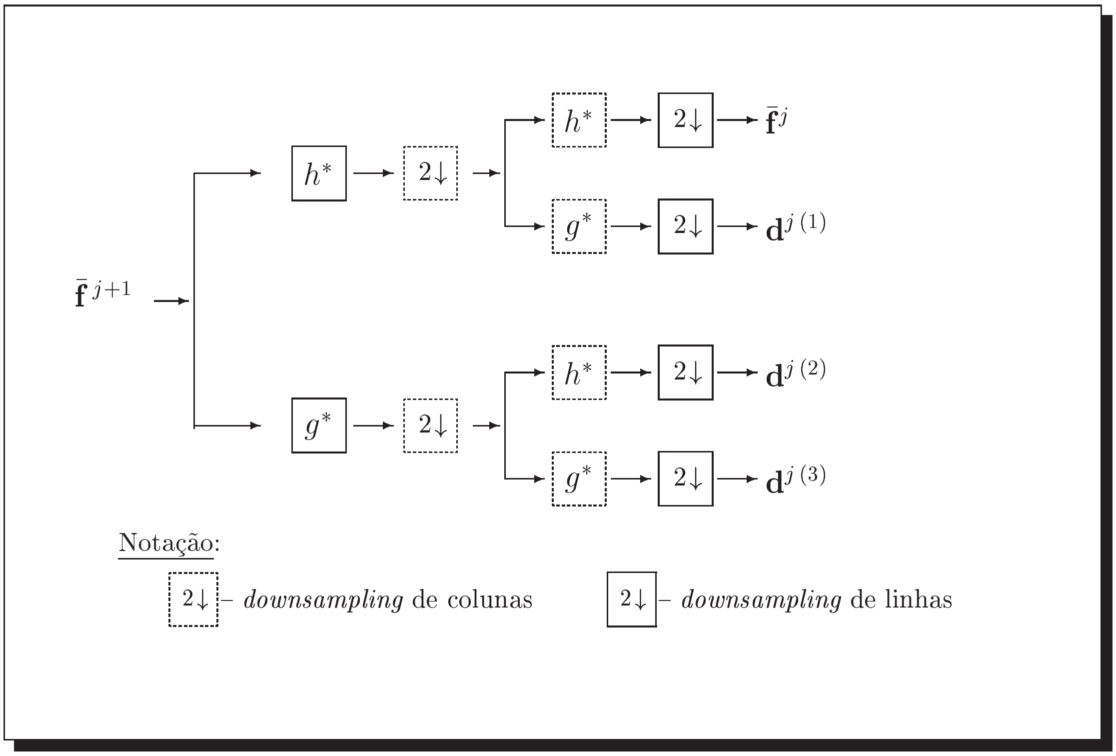


Figura 14: Arquitetura de banco de filtros para a DWT-2D.

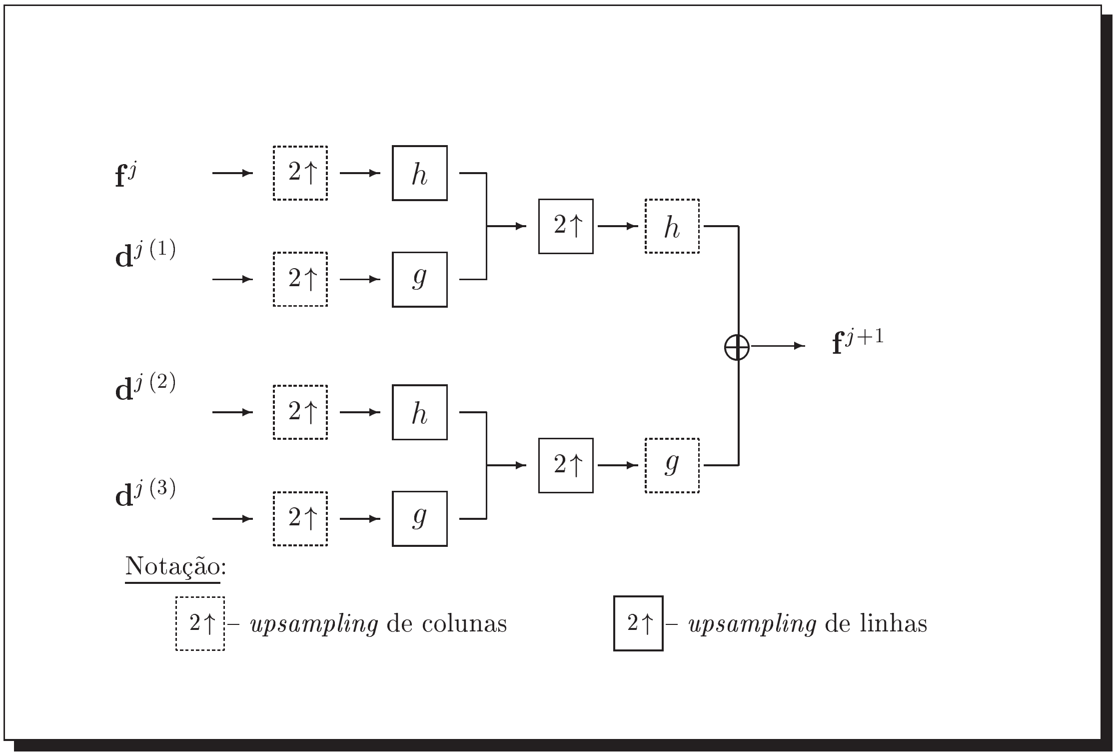
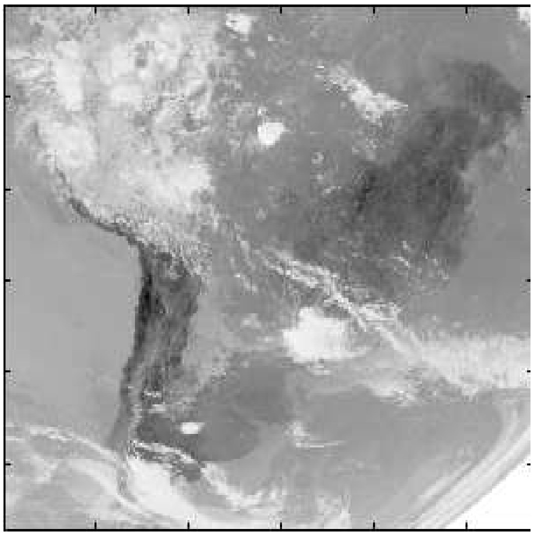


Figura 15: Arquitetura de banco de filtros para a IDWT-2D.

(a) Imagem original



(b) Imagem comprimida

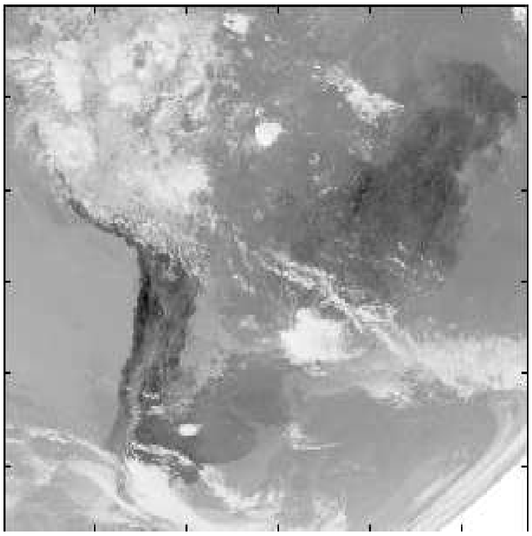


Figura 16: Exemplo de compressão de uma imagem Meteosat 512×512 pixels do canal infravermelho curto da América do Sul. Fonte da imagem: CPTEC/INPE

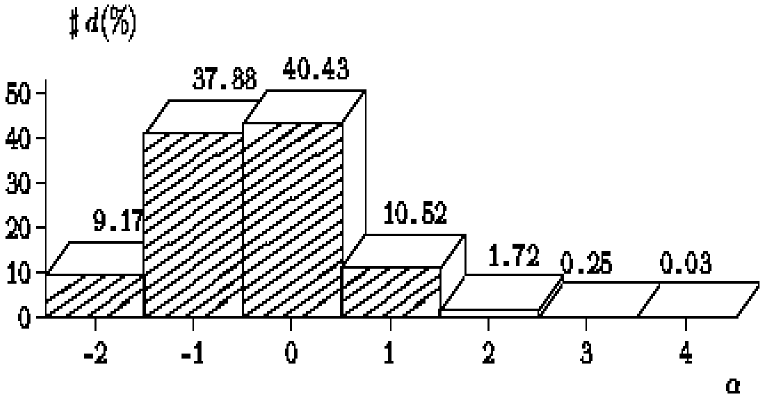


Figura 17: Distribuição dos coeficientes wavelet de acordo com sua ordem de magnitude $\epsilon = 10^{\alpha}$ para a imagem da Figura 16(a).

Outro exemplo é mostrado na Figura 18 (a) de uma imagem convertida do padrão RGB para tons de cinza. Neste caso, com $\epsilon = 10$ resultou em um total de $\approx 31\%$ dos coeficientes originais com magnitude superior a ϵ. Aplicando-se a IDWT sobre os coeficientes truncados, recuperou-se a imagem em (b). Analogamente, com $\epsilon = 100$ obtém-se a imagem em (c), com apenas $\approx 2,5\%$ dos coeficientes originais.

(a) Imagem original

(b) $\epsilon = 10$

(c) $\epsilon = 100$

Figura 18: Exemplo de compressão utilizando as wavelet ortogonais de Daubechies para $K = 2$: (a) uma imagem 873×567 pixels em tons de cinza; (b) e (c) são as imagens reconstruidas com 31% e $2,5\%$ dos coeficientes originais.

Referências

Bracewell R., 1986, “The Fourier Transform and its Applications”, McGraw-Hill.

Cipra, B. A., 2000, “The best of 20th century: editors name top 10 algorithms”, SIAM News, Vol. 33, No. 4.

Cooley J. e Tukey J., 1965, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, Math. Comp., Vol. 19, pp. 297-301.

Daubechies I., 1992, “ Ten Lectures on Wavelets”, SIAM.

Mallat S., 1999, “A Wavelet Tour of Signal Processing”, Academic press.

Strang G. e Nguyen T., 1996 “Wavelets and Filter Banks”,Wellesley-Cambridge Press.