

Análise Comparativa de Dispersão Numérica e Estabilidade em Diferentes Esquemas de Diferenças Finitas de Alta Ordem para as Equações de Maxwell

Paulo J. Ferreira*, Sônia M. Gomes†, José R. Pereira‡e Pedro Pinho§

1 de Agosto de 2005

1 Introdução

O Método FDTD (Finite-Difference Time-Domain) é o mais popular na área de eletromagnetismo computacional [3]. No FDTD os campos elétrico e magnético são representados por vetores contendo suas amostras em pontos de malhas entrelaçadas, uniformemente distribuídos no domínio espaço-tempo, e os operadores diferenciais são aproximados por diferenças finitas de segunda ordem. Para melhorar o desempenho do esquema FDTD, esquemas de ordem superior podem ser aplicados, reduzindo o número de células por comprimento de onda necessário para alcançar um dado grau de precisão, como descrito em [3].

Os esquemas estudados no presente trabalho baseiam-se em malhas no domínio temporal $\times$ espacial para os campos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{E}$ que podem ou não estarem entrelaçadas. Com relação à discretização temporal, os esquemas também podem ser explícitos ou implícitos. No caso dos esquemas implícitos, considera-se a estratégia de Crank-Nicolson. Em todos os casos, os esquemas podem ser formulados pelo método de colocação espacial utilizando espaços aproximantes definidos em termos de uma função básica $\Phi(x)$, que é escolhida entre as funções de escalonamento de Dubuc-Delauniers [1] e que satisfazem à condição de interpolação $\Phi(k) = \delta_k$. Essas funções de escalonamento estão associadas a esquemas de refinamento interpolantes. Identifica-se a ordem dos diferentes esquemas por $2p$ em que parâmetro p indica uma interpolação polinomial centrada de grau $2p - 1$, $p \geq 1$ dos diferentes esquemas de refinamento interpolantes que dão origem a $\Phi(x)$.

Na sequência, apresentam-se os diferentes esquemas a serem tratados. A análise de estabilidade e dispersão integram a terceira parte deste artigo e a seguir os casos de $p = 1, 2, 3$ e 4 são detalhados. Na última parte, apresentam-se as conclusões do presente estudo.

2 Esquemas Numéricos

As equações de Maxwell se expressam em coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial H^x}{\partial t} &= \frac{\partial E^z}{\partial y} - \frac{\partial E^y}{\partial z}, & \epsilon \frac{\partial E^x}{\partial t} &= \frac{\partial H^z}{\partial y} - \frac{\partial H^y}{\partial z}, \\ -\mu \frac{\partial H^y}{\partial t} &= \frac{\partial E^x}{\partial z} - \frac{\partial E^z}{\partial x}, & \epsilon \frac{\partial E^y}{\partial t} &= \frac{\partial H^x}{\partial z} - \frac{\partial H^z}{\partial x}, \\ -\mu \frac{\partial H^z}{\partial t} &= \frac{\partial E^y}{\partial x} - \frac{\partial E^x}{\partial y}, & \epsilon \frac{\partial E^z}{\partial t} &= \frac{\partial H^y}{\partial x} - \frac{\partial H^x}{\partial y} \end{aligned}$$

em que $\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z)$ denota o vetor campo elétrico, $\mathbf{H} = (H^x, H^y, H^z)$ é o vetor campo magnético, ϵ é a permissividade elétrica e μ é a permeabilidade magnética.

Esquema Explícito na Malhas Entrelaçadas

Como no clássico esquema FDTD (Finite-Difference Time-Domain) [3], consideram-se amostras das componente de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ na malha de Yee

$$\begin{aligned} E_{k+\frac{1}{2},l,m}^{x,n+\frac{1}{2}} &= E^x((k+\frac{1}{2})\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, (n+\frac{1}{2})\Delta t), \\ E_{k,l+\frac{1}{2},m}^{y,n+\frac{1}{2}} &= E^y(k\Delta x, (l+\frac{1}{2})\Delta y, m\Delta z, (n+\frac{1}{2})\Delta t), \\ E_{k,l,m+\frac{1}{2}}^{z,n+\frac{1}{2}} &= E^z(k\Delta x, l\Delta y, (m+\frac{1}{2})\Delta z, (n+\frac{1}{2})\Delta t), \\ H_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{x,n} &= H^x(k\Delta x, (l+\frac{1}{2})\Delta y, (m+\frac{1}{2})\Delta z, n\Delta t), \\ H_{k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2}}^{y,n} &= H^y((k+\frac{1}{2})\Delta x, l\Delta y, (m+\frac{1}{2})\Delta z, n\Delta t), \\ H_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m}^{z,n} &= H^z((k+\frac{1}{2})\Delta x, (l+\frac{1}{2})\Delta y, m\Delta z, n\Delta t). \end{aligned}$$

A partir desses valores discretos, definem-se aproximações das componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ por operadores de interpolação em espaços aproximantes definidos em termos do escalonamento de uma função básica $\Phi(x)$ e suas translações aos pontos das malhas. Utilizando o esquema de colocação para as derivadas espaciais dessas aproximações e diferenças finitas centradas para as derivadas temporais chega-se ao seguinte modelo

$$E_{k+\frac{1}{2},l,m}^{x,n+\frac{1}{2}} = E_{k+\frac{1}{2},l,m}^{x,n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} H_{k+\frac{1}{2},l'+\frac{1}{2},m}^{z,n} \alpha(l-l'-1)$$

*Instituto de Telecomunicações, Polo de Aveiro. Aveiro, Portugal. pjf@ieeta.pt

†Universidade Estadual de Campinas, IMECC. Caixa Postal 6065. 13083-970 Campinas SP, Brasil. soniag@ime.unicamp.br

‡Instituto de Telecomunicações, Polo de Aveiro. Aveiro, Portugal. jrp@det.ua.pt

§ptpinho@av.it.pt

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} H_{k+\frac{1}{2},l,m'+\frac{1}{2}}^{y,n} \alpha(m-m'-1) \\
E_{k,l+\frac{1}{2},m}^{y,n+\frac{1}{2}} &= E_{k,l+\frac{1}{2},m}^{y,n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} H_{k,l+\frac{1}{2},m'+\frac{1}{2}}^{x,n} \alpha(m-m'-1) \\
& - \frac{\Delta}{\epsilon \Delta x} \sum_{k'} H_{k'+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m}^{z,n} \alpha(k-k'-1) \\
E_{k,l,m+\frac{1}{2}}^{z,n+\frac{1}{2}} &= E_{k,l,m+\frac{1}{2}}^{z,n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \sum_{k'} H_{k'+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2}}^{y,n} \alpha(k-k'-1) \\
& - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} H_{k,l'+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{x,n} \alpha(l-l'-1) \\
H_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{x,n+1} &= H_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{x,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} E_{k,l',m+\frac{1}{2}}^{z,n+\frac{1}{2}} \alpha(l-l') \\
& + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \sum_{m'} E_{k,l+\frac{1}{2},m'}^{y,n+\frac{1}{2}} \alpha(m-m') \\
H_{k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2}}^{y,n+1} &= H_{k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2}}^{y,n} - \frac{1}{\Delta z} \sum_{m'} E_{k+\frac{1}{2},l,m'}^{x,n+\frac{1}{2}} \alpha(m-m') \\
& + \frac{1}{\Delta x} \sum_{k'} E_{k',l,m+\frac{1}{2}}^{z,n+\frac{1}{2}} \alpha(k-k'), \\
H_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m}^{z,n+1} &= H_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m}^{z,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_{k'} E_{k',l+\frac{1}{2},m}^{y,n+\frac{1}{2}} \alpha(k-k') \\
& + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} E_{k+\frac{1}{2},l',m}^{x,n+\frac{1}{2}} \alpha(l-l').
\end{aligned}$$

em que $\alpha(k) = \Phi'(k + 1/2)$. Essa formulação é semelhante ao esquema MRTD (multiresolution time-domain) na sua versão S-MRTD proveniente de uma formulação do tipo Galerkin em espaços aproximantes similares [2]

Esquema Explícito em Malhas Coincidentes

Tanto para as componentes de $\mathbf{E}$ quanto para as de $\mathbf{H}$, consideram-se agora amostras em uma única malha

$$\begin{aligned}
E_{k,l,m}^{x,n} &= E^x(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t), \\
E_{k,l,m}^{y,n} &= E^y(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t), \\
E_{k,l,m}^{z,n} &= E^z(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t), \\
H_{k,l,m}^{x,n} &= H^x(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t), \\
H_{k,l,m}^{y,n} &= H^y(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t), \\
H_{k,l,m}^{z,n} &= H^z(k\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t).
\end{aligned}$$

Procedendo de forma similar ao caso de malhas entrelaçadas, obtem-se as seguintes equações discretas

$$\begin{aligned}
E_{k,l,m}^{x,n+1} &= E_{k,l,m}^{x,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} H_{k,l',m}^{z,n} \beta(l-l') \\
& - \frac{1}{\Delta z} \sum_{m'} H_{k,l,m'}^{y,n} \beta(m-m')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{k,l,m}^{y,n+1} &= E_{k,l,m}^{y,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} H_{k,l,m'}^{x,n} \beta(m-m') \\
& - \frac{1}{\epsilon \Delta x} \sum_{k'} H_{k',l,m}^{z,n} \beta(k-k') \\
E_{k,l,m}^{z,n+1} &= E_{k,l,m}^{z,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \sum_{k'} H_{k',l,m}^{y,n} \beta(k-k') \\
& - \frac{1}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} H_{k,l',m}^{x,n} \beta(l-l') \\
H_{k,l,m}^{x,n+1} &= H_{k,l,m}^{x,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} E_{k,l',m}^{z,n+1} \beta(l-l') \\
& + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \sum_{m'} E_{k,l,m'}^{y,n+1} \beta(m-m') \\
H_{k,l,m}^{y,n+1} &= H_{k,l,m}^{y,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \sum_{m'} E_{k,l,m'}^{x,n+1} \beta(m-m') \\
& + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_{k'} E_{k',l,m}^{z,n+1} \beta(k-k') \\
H_{k,l,m}^{z,n+1} &= H_{k,l,m}^{z,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_{k'} E_{k',l,m}^{y,n+1} \beta(k-k') \\
& + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} E_{k,l',m}^{x,n+1} \beta(l-l')
\end{aligned}$$

em que $\beta(k) = \Phi'(k)$.

Crank-Nicolson em Malhas Coincidentes

Como no caso anterior, utilizam-se todos os campos nos mesmos pontos, tanto no tempo quanto no espaço. Mas na integração temporal, o princípio é aproximar as derivadas espaciais pela média entre os seus valores do tempo t^n e t^{n+1} . O resultado é o sistema implícito de equações

$$\begin{aligned}
E_{k+1,l,m}^{x,n+1} &= E_{k+1,l,m}^{x,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} \frac{H_{k,l',m}^{z,n+1} + H_{k,l',m}^{z,n}}{2} \beta(l-l') \\
& - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} \frac{H_{k,l,m'}^{y,n+1} + H_{k,l,m'}^{y,n}}{2} \beta(m-m') \\
E_{k+1,l,m}^{y,n+1} &= E_{k+1,l,m}^{y,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} \frac{H_{k,l',m}^{x,n+1} + H_{k,l',m}^{x,n}}{2} \beta(l-l') \\
& - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} \frac{H_{k,l,m'}^{z,n+1} + H_{k,l,m'}^{z,n}}{2} \beta(m-m') \\
E_{k,l,m}^{z,n+1} &= E_{k,l,m}^{z,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \sum_{k'} H_{k'+1/2,l,m}^{y,n} \beta(k-k') \\
& - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} \frac{H_{k,l',m}^{x,n+1} + H_{k,l',m}^{x,n}}{2} \beta(l-l')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{k,l,m}^{x,n+1} &= H_{k,l,m}^{x,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} \frac{E_{k,l',m}^{z,n+1} + E_{k,l',m}^{z,n}}{2} \beta(l-l') \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \sum_{m'} \frac{E_{k,l,m'}^{y,n+1} + E_{k,l,m'}^{y,n}}{2} \beta(m-m') \\
H_{k,l,m}^{y,n+1} &= H_{k,l,m}^{y,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \sum_{m'} \frac{E_{k,l,m'}^{x,n+1} + E_{k,l,m'}^{x,n}}{2} \beta(m-m') \\
&+ \frac{1}{\Delta x} \sum_{k'} \frac{E_{k',l,m}^{z,n+1} + E_{k',l,m}^{z,n}}{2} \beta(k-k') \\
H_{k,l,m}^{z,n+1} &= H_{k,l+1/2,m}^{x,n} - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_{k'} \frac{E_{k',l,m}^{y,n+1} + E_{k',l,m}^{y,n}}{2} \beta(k-k') \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l'} \frac{E_{k,l',m}^{x,n+1} + E_{k,l',m}^{x,n}}{2} \beta(l-l')
\end{aligned}$$

Crank-Nicolson em Malhas Entrelaçadas

Neste caso, utilizam-se os mesmas células entrelaçadas de Yee na discretização espacial, mas para a discretização temporal, todos os campos são tomados nos mesmos níveis de tempo. Como no caso anterior, na integração temporal aproximam-se as derivadas espaciais pela média entre os seus valores do tempo t^n e t^{n+1} . Por exemplo, no caso da componente E^x tem-se a equação

$$\begin{aligned}
E_{k+\frac{1}{2},l,m}^{x,n+1} &= E_{k+\frac{1}{2},l,m}^{x,n} \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y} \sum_{l'} \frac{H_{k+\frac{1}{2},l'+\frac{1}{2},m}^{z,n+1} + H_{k+\frac{1}{2},l'+\frac{1}{2},m}^{z,n}}{2} \alpha(l-l'-1) \\
&- \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z} \sum_{m'} \frac{H_{k+\frac{1}{2},l,m'+\frac{1}{2}}^{y,n+1} + H_{k+\frac{1}{2},l,m'+\frac{1}{2}}^{y,n}}{2} \alpha(m-m'-1)
\end{aligned}$$

Verificam-se fórmulas análogas para as demais componentes dos campos elétrico e magnético.

3 Estabilidade e Dispersão

Consideram-se soluções das equações de Maxwell na forma de ondas planas

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(x, y, z, t) &= \begin{pmatrix} H^x \\ H^y \\ H^z \end{pmatrix} e^{i(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z - \omega t)} \\
\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \begin{pmatrix} E^x \\ E^y \\ E^z \end{pmatrix} e^{i(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z - \omega t)}
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões no sistema analítico verifica-se que a frequência de fase ω e números de onda ξ_x, ξ_y e ξ_z devem satisfazer a relação de dispersão $\omega^2 \mu \epsilon = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$.

Modelo Explícito em Malhas Entrelaçadas

Substituindo as expressões das ondas planas nas equações do modelo explícito em malhas entrelaçadas obtém-se a relação de dispersão numérica

$$\frac{\sin^2(\omega \Delta t / 2)}{(c \Delta t)^2} = \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_x \Delta x)}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_y \Delta y)}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_z \Delta z)}{\Delta z} \right)^2,$$

em que $c = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$ e $\tilde{\alpha}(\eta) = \sum_{k \geq 0} \alpha(k) \sin((k+1/2)\eta)$. Se os espaçamentos forem iguais $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, usando frequências normalizadas $\Omega = \omega \Delta t$, $S_x = \xi_x h$, $S_y = \xi_y h$, $S_z = \xi_z h$, e definindo o parâmetro de CFL $s = \frac{\Delta t}{\sqrt{\mu \epsilon} h} = \frac{c \Delta t}{h}$, as relação de dispersão numérica se expressa $\sin^2(\frac{\Omega}{2}) = s^2[(\tilde{\alpha}(S_x))^2 + (\tilde{\alpha}(S_y))^2 + (\tilde{\alpha}(S_z))^2]$. Sendo assim, é preciso ter $s^2[(\tilde{\alpha}(S_x))^2 + (\tilde{\alpha}(S_y))^2 + (\tilde{\alpha}(S_z))^2] \leq 1$, o que implica a conhecida condição de estabilidade $s \leq \frac{1}{\sqrt{3}K_\alpha}$, em que $K_\alpha = \max_\eta |\tilde{\alpha}(\eta)|$.

Modelo Explícito em Malhas Coincidentes

Substituindo as expressões das ondas planas nas equações do modelo explícito em malhas coincidente obtém-se a relação de dispersão numérica

$$\frac{\sin^2(\omega \Delta t / 2)}{(c \Delta t)^2} = \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_x \Delta x)}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_y \Delta y)}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_z \Delta z)}{\Delta z} \right)^2,$$

em que define-se a função $\tilde{\beta}(z) = \sum_{l \geq 1} \beta(l) \sin[lz]$. Considerando uma malha com espaçamento uniforme e as frequências normalizadas definidas anteriormente, esta relação de dispersão numérica se expressa como $\sin^2(\frac{\Omega}{2}) = s^2[(\tilde{\beta}(S_x))^2 + (\tilde{\beta}(S_y))^2 + (\tilde{\beta}(S_z))^2]$. Neste caso, é preciso que $s^2[(\tilde{\beta}(S_x))^2 + (\tilde{\beta}(S_y))^2 + (\tilde{\beta}(S_z))^2] \leq 1$, o que implica a condição de estabilidade $s \leq \frac{1}{\sqrt{3}K_\beta}$, em que $K_\beta = \max_\eta |\tilde{\beta}(\eta)|$.

Modelos Implícitos de C-N

Prova-se que esses esquemas são incondicionalmente estáveis. No caso de malhas entrelaçadas, a relação de dispersão tem a forma

$$\frac{tg^2(\omega \Delta t / 2)}{(c \Delta t)^2} = \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_x \Delta x)}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_y \Delta y)}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\alpha}(\xi_z \Delta z)}{\Delta z} \right)^2.$$

e no caso de malhas coincidentes é

$$\frac{tg^2(\omega \Delta t / 2)}{(c \Delta t)^2} = \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_x \Delta x)}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_y \Delta y)}{\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\beta}(\xi_z \Delta z)}{\Delta z} \right)^2.$$

4 Exemplos Numéricos

A função $\Phi(x)$ satisfaz uma relação de escalonamento $\Phi(x) = 2 \sum_n h(n) \Phi(2x - n)$ em que os valores $h(n)$ correspondem aos coeficientes de interpolação do esquema de refinamento. Derivando a relação de escalonamento, os coeficientes $\beta(k)$ podem ser obtidos a partir da solução

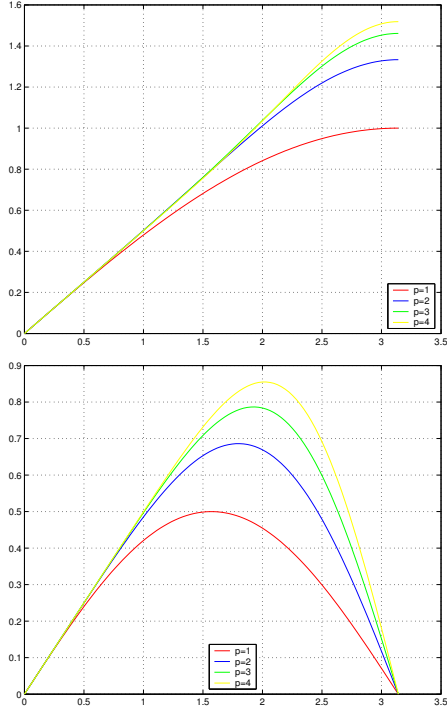


Figura 1: Análise de estabilidade para malhas entrelaçadas (acima) e coincidentes (abaixo)

do problema de auto-valor $\beta(k) = 4 \sum_n h(n) \beta(2k - n)$, com uma relação de normalização apropriada. Os valores não nulos de $\beta(k)$, $k > 0$ são indicados na Tabela 1. Os valores de $\beta(k)$, $k < 0$ são obtidos da relação de anti-simetria $\beta(-k) = -\beta(k)$. Os valores não nulos de $\alpha(k)$, $k \geq 0$, são indicados na Tabela 2. Os valores de $\alpha(k)$, $k < 0$, são obtidos pela relação de simetria $\alpha(-k) = -\alpha(k - 1)$. Para $p = 1$ os coeficientes $\alpha(k)$ derivam-se diretamente da fórmula $\alpha(-1) = \Phi'(-1/2) = 1$, $\alpha(1) = \Phi'(1/2) = -1$ e $\alpha(0) = 0$ nos demais casos. Sendo assim, para $p = 1$, o sistema discreto de equações explícitas para malhas entrelaçadas corresponde ao tradicional esquema FDTD.

Apresentam-se na parte superior da Figura 1 os gráficos de $|\tilde{\alpha}(z)|$, $0 \leq z \leq \pi$, para diferentes ordens de interpolação. Observa-se que $K_\alpha = K_\alpha(p)$ é assumido em $z = \pi$ e que este valor cresce à medida que p aumenta. Ou seja, a condição de estabilidade do esquema em malhas entrelaçadas fica mais restritiva à medida que se aumenta a ordem do esquema. Apresentam-se na parte inferior da Figura 1 os gráficos de $|\tilde{\beta}(z)|$, $0 \leq z \leq \pi$, para diferentes ordens dos esquemas. Observa-se que $K_\beta = K_\beta(p)$ também cresce à medida que p aumenta. No entanto, esses valores são superiores aos seus correspondentes no caso de malhas entrelaçadas. Ou seja, a condição de estabilidade é menos restritiva para malhas coincidentes. Apresentam-se os parâmetros de estabilidade K_α^{-1} e K_β^{-1} na Tabela 3 para diferentes valores de p .

k	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
1	-2/3	-272/365	-1747/2203
2	1/12	53/365	1483/7724
3		-16/1095	-3999/11882
4		-1/2920	73/32823
5			128/743295
6			-1/1189272

Tabela 1: Coeficientes não nulos $\beta(k)$, $k > 0$

k	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
0	-1.2291666667	-1.29181	-1.3110340443
2	0.0937500000	0.137134	0.1560100710
3	-0.0104166667	-0.0287618	-0.0419957460
4		0.00347014	0.0086543236
5		-8.02654×10^{-6}	-0.0008308695
6			-0.0000108999
7			0.0000000041

Tabela 2: Coeficientes não nulos $\alpha(k)$, $k \geq 0$

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
K_β^{-1}	2.0	1.4575	1.2713	1.1697
K_α^{-1}	1.0	0.75	0.6844	0.6585

Tabela 3: Parâmetros de estabilidade

Dispersão Numérica: Caso Unidimensional

Uma forma comum de visualizar o efeito de dispersão numérica considera a velocidade de fase normalizada $\bar{v} = v_p/c$ em função do tamanho de célula normalizada $\delta = \Delta x \omega / c 2\pi$, para diferentes valores do número de CFL $s = c\Delta t / \Delta x$, dentro do limite de estabilidade, em que $v_p = \frac{\omega}{\xi} c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Definindo o comprimento de onda $\lambda = cT$ em que $T = 2\pi/\omega$ é o período temporal, verifica-se que se $\delta = 1/N$, então $N = \lambda/\Delta x$ é o número de células por comprimento de onda. Ou seja, o parâmetro δ mede a densidade relativa da malha. No caso analítico, observa-se que a velocidade de fase normalizada é constante $v_p/c = 1$. Para os modelos numéricos, verifica-se que $\omega\Delta t = s2\pi\delta$ e $\xi\Delta x = \frac{2\pi\delta}{v}$. Sendo assim, pode-se expressar a relação de dispersão numérica do modelo em malhas entrelaçadas em termos dos parâmetros $\bar{v}$ e δ na forma $\sin(s\pi\delta) = s\tilde{\alpha}(\frac{2\pi\delta}{v})$, do que se deduz a fórmula

$$\bar{v} = \frac{2\pi\delta}{\tilde{\alpha}-1 \left[\frac{\sin(s\pi\delta)}{s} \right]}.$$

Como a função $\tilde{\alpha}^{-1}(z)$ está definida para $0 \leq z \leq S_\alpha$, a variação de δ deve ser de tal forma que $0 \leq \sin(s\pi\delta) < sS_\alpha$.

A Figura 2 mostra os graficos de $\bar{v}$ em função do número de células por comprimento de onda para valores do parâmetro de CFL variando no domínio de estabilidade dos esquemas explícitos em malhas entrelaçadas de diferentes ordens. Para $s = 0.5$, esses gráficos mostram que com $p = 1$ (FDTD) e 10 células por comprimento de onda é possível obter uma precisão de 98,8% enquanto que para ordens superiores 8 células por comprimento de onda são suficientes. No entanto, observa-se que para $p = 1$ as curvas de dispersão numérica se aproximam da constante $\bar{v} = 1$ do modelo analítico quando se aproxima do limite de estabilidade $s = 1$. No caso de ordens superiores $p > 1$ a tendência é contrária. Ou seja, a precisão aumenta à medida que o s tende a zero. Nesse sentido, uma comparação justa dos esquemas de diferentes ordens não pode ser feita para um valor fixo do parâmetro de CFL.

Analogamente, para o modelo em malhas coincidentes, tem-se a relação $\sin(s\pi\delta) = s\tilde{\beta}(\frac{2\pi\delta}{v})$. Isto é,

$$\bar{v} = \frac{2\pi\delta}{\tilde{\beta}-1 \left[\frac{\sin(s\pi\delta)}{s} \right]}$$

que é válida para valores de δ de tal forma que $0 \leq \sin(s\pi\delta) < sS_\beta$. A Figura 3 mostra os graficos de $\bar{v}$ em função do número de células por comprimento de onda para valores do parâmetro de CFL variando no domínio de estabilidade dos esquemas explícitos em malhas coincidentes de diferentes ordens. Nesse caso, para $s = 0,5$ e $p = 1$ a precisão de 98% requer mais do que 24 células por comprimento de onda. No entanto, para $p \geq 2$ essa precisão pode ser alcançada com 8 células por comprimento

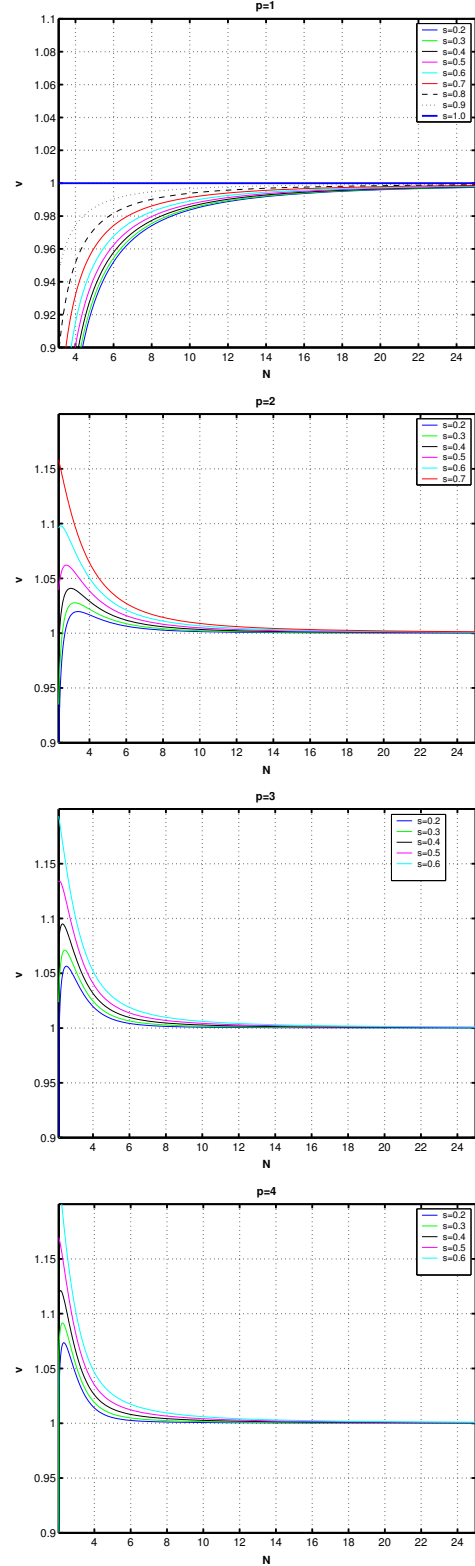


Figura 2: Dispersão de esquemas explícitos em malhas entrelaçadas: efeito do CFL

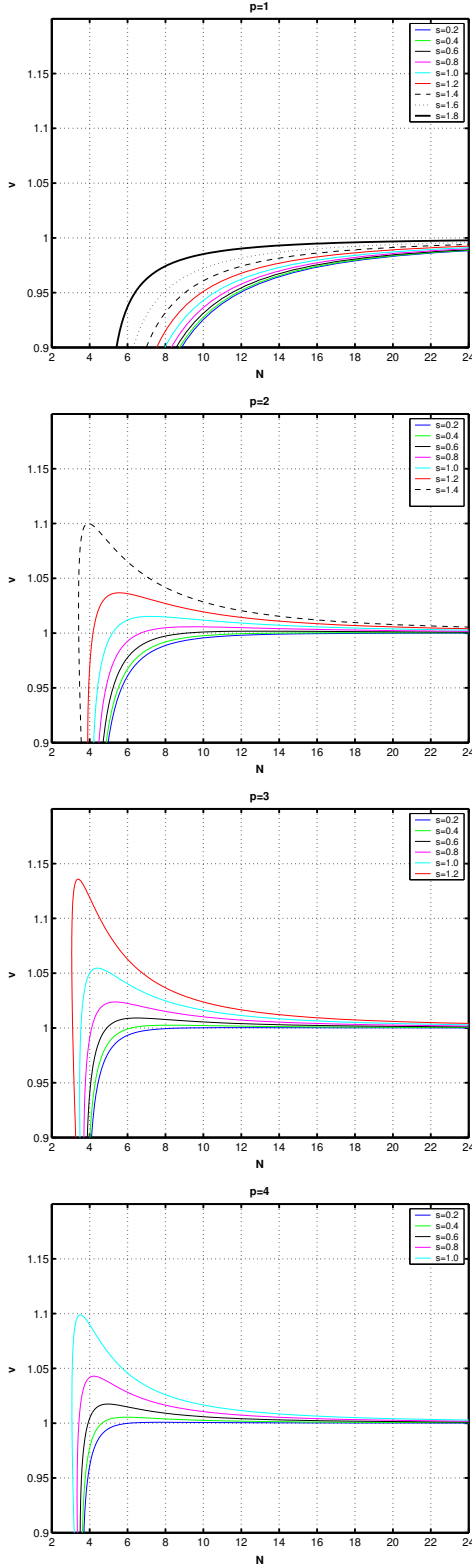


Figura 3: Dispersão de esquemas explícitos em malhas coincidentes: efeito do CFL

de onda, o mesmo resultado do caso de malhas entrelaçadas. Como no caso anterior, observa-se que para $p = 1$ as curvas de dispersão numérica se aproximam da constante $\bar{v} = 1$ do modelo analítico quando se aproxima do limite de estabilidade $s = 2$, e no caso de ordens superiores $p > 1$ a tendência é a precisão aumentar à medida que s tende a zero.

No caso do método de Crank-Nicolson em malhas entrelaçadas, a relação de dispersão tem a forma $tg(\Omega/2) = s\tilde{\alpha}(\Xi)$ ou $tg(s\pi\delta) = s\tilde{\alpha}(\frac{2\pi\delta}{\bar{v}})$. Isto é

$$\bar{v} = \frac{2\pi\delta}{\tilde{\alpha}^{-1}\left(\frac{tg(s\pi\delta)}{s}\right)} \quad \delta \leq \delta_{max} = \frac{arctg(sS_{\alpha})}{s\pi}.$$

A Figura 4 mostra os graficos de $\bar{v}$ em função do número de células por comprimento de onda do método de CN em malhas entrelaçadas, para valores do parâmetro de CFL variando no intervalo $0.5 \leq s \leq 4$. Observa-se que o preço por usar um CFL elevado é o aumento do número de células por comprimento de onda nesserário. Por exemplo, com $s = 4$ e 50 células por comprimento de onda se consegue menos de 98% de precisão para os esquemas de todas as ordens analisadas. Com 20 células por comprimento de onda, obtêm-se 98% de precisão com $p = 2$ mas ao preço de reduzir o CFL para $s = 1, 5$. Com essa mesma densidade e $s = 1$, pode-se obter 99% de precisão com $p = 2, 3$ e 4.

Para malhas coincidentes, tem-se que $tg(\Omega/2) = s\tilde{\beta}(\Xi)$, ou $tg(s\pi\delta) = s\tilde{\beta}(\frac{2\pi\delta}{\bar{v}})$. Isto é

$$\bar{v} = \frac{2\pi\delta}{\tilde{\beta}^{-1}\left(\frac{tg(s\pi\delta)}{s}\right)}, \quad \delta \leq \frac{arctg(sS_{\beta})}{s\pi}.$$

A Figura 5 mostra os graficos de $\bar{v}$ em função do número de células por comprimento de onda do método de CN em malhas coincidente, para valores do parâmetro de CFL variando no intervalo $0.5 \leq s \leq 4$. Observa-se que para o esquema de ordem inferior $p = 1$ o preço é ainda mais elevado em termos de número de células por comprimento de onda em comparação com o esquema CN em malhas entrelaçadas de mesma ordem. No entanto, quase não se nota essa diferença nos esquemas de ordem superior.

Caso Bidimensional: Efeito do Ângulo de Propagação na Dispersão

Supondo que a direção de propagação é definida pelo ângulo θ de tal forma que, em coordenadas polares, os números de ondas se expressam por $\xi_x = r \sin \theta$, $\xi_y = r \cos \theta$, consideram-se a velocidade de fase normalizada $\bar{v} = v_p/c$, em que $v_p = w/r$, a densidade relativa $\delta = h\omega/c2\pi$, em que $h = \Delta x = \Delta y$, de tal forma que o número de CFL é dado por $s = c\Delta t/h$.

No caso analítico, observa-se que $v_p/c = 1$. Verifica-se que $\omega\Delta t = s2\pi\delta$ e $\xi_x h = \frac{2\pi\delta \sin \theta}{\bar{v}}$, $\xi_y h = \frac{2\pi\delta \cos \theta}{\bar{v}}$ e $\omega\Delta t = 2\pi\delta s$. Desta forma, as fórmulas de dispersão

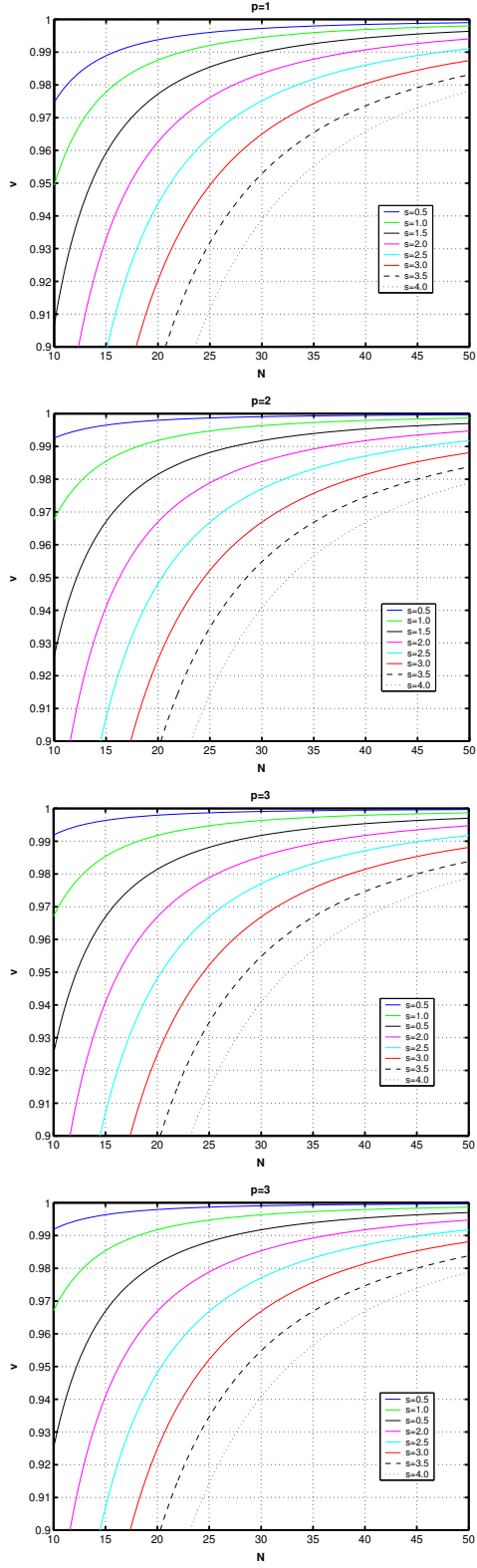


Figura 4: Dispersão do método CN em malhas entrelaçadas: efeito do CFL

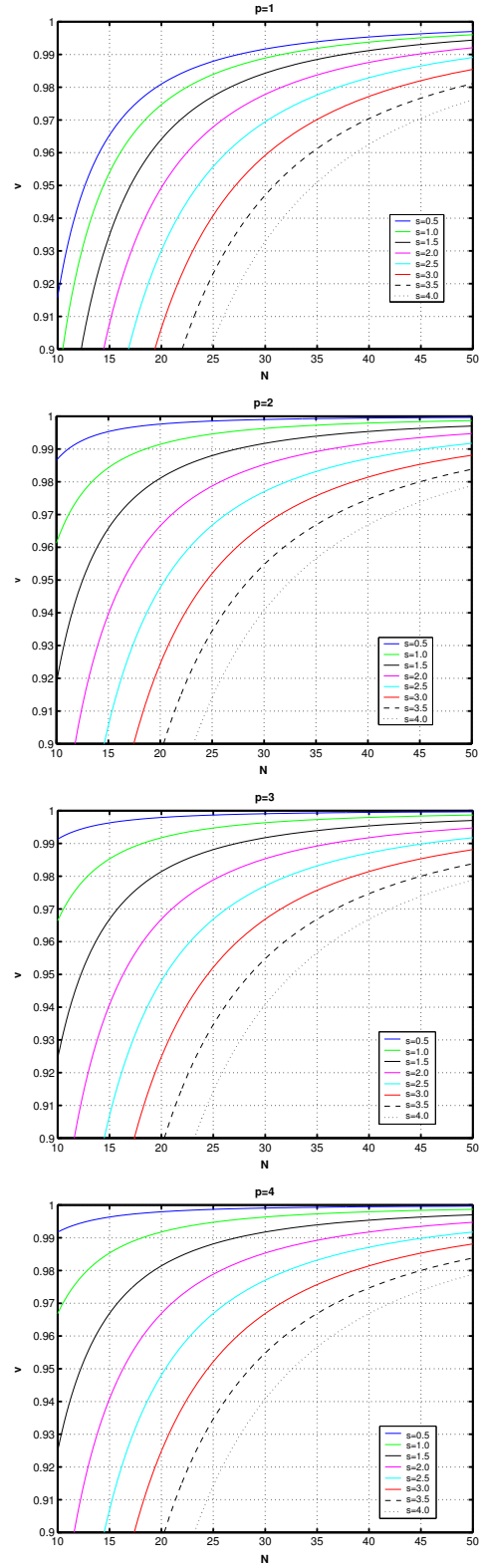


Figura 5: Dispersão do método CN em malhas coincidentes: efeito do CFL

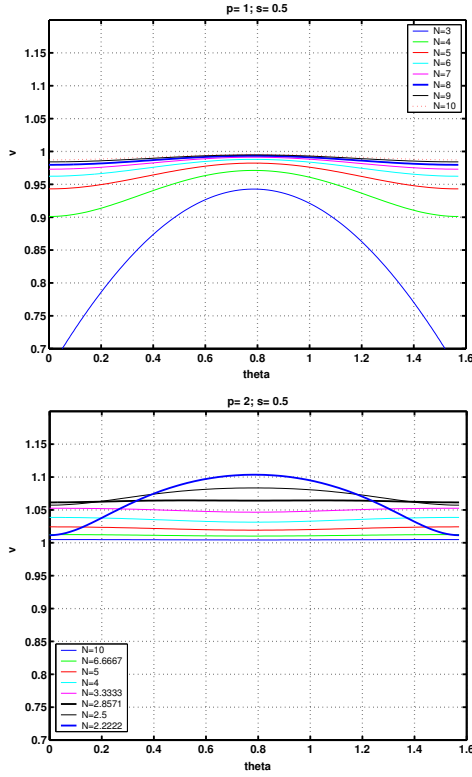


Figura 6: Dispersão de esquemas explícitos em malhas entrelaçadas: efeito do ângulo de propagação

numérica podem ser escritas em função dos parâmetros $\bar{v}$, δ e θ

$$\sin(\delta\pi s) = s \sqrt{\tilde{\alpha} \left(\frac{2\pi\delta \sin \theta}{\bar{v}} \right)^2 + \left(\tilde{\alpha} \left(\frac{2\pi\delta \cos \theta}{\bar{v}} \right) \right)^2}.$$

$$\sin(\delta\pi s) = s \sqrt{\tilde{\beta} \left(\frac{2\pi\delta \sin \theta}{\bar{v}} \right)^2 + \left(\tilde{\beta} \left(\frac{2\pi\delta \cos \theta}{\bar{v}} \right) \right)^2}.$$

$$\text{tg}(\delta\pi s) = s \sqrt{\tilde{\alpha} \left(\frac{2\pi\delta \sin \theta}{\bar{v}} \right)^2 + \left(\tilde{\alpha} \left(\frac{2\pi\delta \cos \theta}{\bar{v}} \right) \right)^2}.$$

$$\text{tg}(\delta\pi s) = s \sqrt{\tilde{\beta} \left(\frac{2\pi\delta \sin \theta}{\bar{v}} \right)^2 + \left(\tilde{\beta} \left(\frac{2\pi\delta \cos \theta}{\bar{v}} \right) \right)^2}.$$

para os esquemas explícitos em malhas entrelaçadas, malhas coincidentes, CN em malhas entrelaçadas e CN em malhas coincidentes, respectivamente. A Figura 6 mostra a variação da velocidade de fase com o ângulo de propagação para esquemas explícitos em malhas entrelaçadas com $p = 1$ (acima) e $p = 2$ (abaixo) para $s = 0,5$ e diferentes densidades da malha. Para $p = 1$ o erro máximo ocorre em $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ e é mínimo para $\theta = \pi/4$. O efeito do ângulo de propagação torna-se imperceptível para densidades elevadas, especialment para $p = 2$. Para esquemas de ordem superior o comportamento é similar.

5 Conclusões Finais

Nesse artigo é feita uma análise detalhada da estabilidade e dispersão numérica de uma variedade de esquemas numéricos para as equações de Maxwell. Consideram-se malhas entrelaçadas para a amostragem dos campos elétrico e magnético e também analisam-se os casos em que ambos campos são colocados na mesma malha. Discretizações temporais podem ser explícitas ou implícitas em cada um dos casos. Os resultados apresentados conduzem às seguintes conclusões

- Por causa da estabilidade, os esquema implícitos exigem restrições na escolha do passo de tempo, o que é determinado pela condição de CFL. A região de estabilidade diminui à medida que a ordem do esquema aumenta, e é mais restritiva no caso de malhas entrelaçadas.
- Esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis. Permitindo o uso de parâmetros CFL elevados, a escolha do passo de tempo pode ser arbitrária, ficando limitada apenas por restrições de precisão. No entanto, a implementação de esquemas implícitos é mais complicada, impondo a resolução de sistemas não lineares em cada passo de tempo. Essa desvantagem se acentua em dimensões superiores.
- Do ponto de vista de dispersão numérica, o uso de malhas entrelaçadas poder ser favorável do que com malhas coincidentes. No entanto, aumentando a densidade das malhas, esse efeito é menos significativo, principalmente em esquemas de ordem alta.

Agradecimentos

O presente estudo enquadra-se nas atividades de um projeto conjunto de pesquisa científica no âmbito do acordo de cooperação internacional CAPES(Brasil)-GRICES(Portugal). Os autores agradecem esse apoio, bem como de recursos parciais de outras agências de fomento no Brasil (CNPq e FAPESP).

Referências

- [1] G. Delauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5, 1986.
- [2] M. Krumpholtz and L. B. Katehi. Mrtd: New time-domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 44, 1996.
- [3] A. Taflov. *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time Domain Method*. Norwood, MA, 1998.