Imersões

Sejam V e M variedades diferenciáveis. Uma *imersão* $f : V \to M$ é uma aplicação diferenciável tal que para todo $x \in V$, df_x é injetora. Quando f é uma imersão o conjunto $f(V)$ é chamado de *subvariedade imersa* de M. Uma subvariedade imersa será denotada por $L \hookrightarrow M$, com $L = f(V)$, subconjunto de M, ou apenas por L.

Em L existem duas topologias naturais:

1. a topologia induzida em L como subconjunto de M e

2. a *topologia intrínseca* , que é dada pela topologia de N: os abertos nessa topologia são os conjuntos $A \subset L$ tais que $f^{-1}(A)$ é aberto em N.

Como a imersão é uma aplicação contínua, todo aberto da topologia induzida é um aberto intrínseco, mas em geral as duas topologias são diferentes. A comparação entre elas fornece as seguintes classes de subvariedades imersas:

i) Uma subvariedade imersa é chamada de *subvariedade regular* ou *subvariedade mergulhada* se as topologias induzida e intrínseca coincidem. Nesse caso a imersão é chamada de *mergulho* ou *imersão regular.*

ii) Uma subvariedade imersa, é dita *quase-regular* se a seguinte condição for satisfeita:

   - Se uma aplicação contínua $\phi : N \to M$, com N espaço topológico localmente conexo, assume valores em L então $\phi : N \to L$ é contínua em relação à topologia intrínseca.

Se uma aplicação contínua $\phi : N \to M$ assume valores em L então $\phi : N \to L$ é contínua em relação à topologia induzida. Portanto, se a topologia induzida coincide com a topologia intrínseca a condição de quase-regularidade é satisfeita. Em outras palavras, toda subvariedade mergulhada é quase-regular.

Os seguintes exemplos ajudam a esclarecer o conceito de subvariedade quase-regular.

Exemplos:

1. Se $L \subset \mathbb{R}^2$ tem pontos de auto-interseção, como os da figura, então L não é quase-regular.

   No caso a), por exemplo, se I é um intervalo da reta e $\phi(I)$ é contínua e injetora com $\phi(I)$ como indicado na figura, então $\phi^{-1}(V)$ se reduz a um ponto. Como V é um aberto na topologia intrínseca, ϕ não é contínua em relação a essa topologia.

2. A imersão $\phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} (\cos(t - \pi/2), \operatorname{sen}(t - \pi/2)) & \text{se } 0 < t \leq 2\pi \\ (t - 2\pi, -1) & \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$$

   é de classe $\mathcal{C}^1$, não tem pontos de auto-interseção e não é quase-regular. De fato, seja $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno definida por $\psi(t) = (\cos(t - \pi/2), \operatorname{sen}(t - \pi/2))$. Então ψ é contínua e não é contínua na topologia intrínseca pois se V é o aberto (da topologia intrínseca) indicado na figura então $\psi^{-1}(V)$ é um intervalo do tipo $(-\delta, 0]$ contido em $(-\epsilon, \epsilon)$.

3. Considere o toro bi-dimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, com a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Se r é uma reta parametrizada em $\mathbb{R}^2$ sua projeção $\pi(r)$ é

uma subvariedade imersa de $\mathbb{T}^2$. Em particular, as retas passando pela origem $r_\alpha = \{x(1,\alpha) : x \in \mathbb{R}\}$ dão origem a imersões $\pi(r_\alpha) \hookrightarrow \mathbb{T}^2$. Se α é irracional então $\pi(r_\alpha)$ é uma curva fechada em $\mathbb{T}^2$ e a imersão correspondente é um mergulho. Já se α é irracional $\pi(r_\alpha)$ é denso em $\mathbb{T}^2$. Nesse caso a imersão não é um mergulho, pois, por exemplo, um intervalo do tipo $\{x(1,\alpha) : x \in (-\varepsilon,\varepsilon)\}$ é um aberto intrínseco mas não na topologia induzida. No entanto, as imersões $\pi(r_\alpha)$, são quase-regulares. Para ver isso tome $\phi : N \to \mathbb{T}^2$ contínua com $\phi(N) \subset \pi(r_\alpha)$ e N localmente conexo. Para verificar que ϕ é contínua na topologia intrínseca, pode-se tomando restrições a vizinhanças de N e $\mathbb{T}^2$ e assumir que $\phi(N)$ está contido num retângulo aberto do tipo

$$\begin{aligned} R &= \{(x-\alpha y, \alpha x + y) : x \in I_1, y \in I_2\} \\ &= (I_1(1,\alpha)) + (I_2(-\alpha,1)). \end{aligned}$$

com I_1 e I_2 intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Se I_1 e I_2 são suficientemente pequenos a aplicação

$$(x,y) \in I_1 \times I_2 \mapsto x(1,\alpha) + y(-\alpha,1) \in \mathbb{T}^2$$

é um homeomorfismo. Portanto, a projeção p_2 sobre a reta gerada por $(-\alpha,1)$ é bem definida em R e é uma aplicação contínua. Daí que $p_2 \circ \phi$ é uma aplicação contínua sobre o intervalo $I_2(-\alpha,1)$. Agora, a intersecção de $\pi(r_\alpha)$ com o retângulo R tem no máximo uma quantidade enumerável de componentes conexas. Cada componente conexa é da forma $(\pi(r_\alpha) \cap I_2(-\alpha,1)) + I_1(1,\alpha)$. Isso significa que $p_2 \circ \phi$ assume valores num conjunto enumerável. Como essa aplicação é contínua, ela deve ser constante. Portanto, $\phi(N) \cap R$ está contido num intervalo do tipo $I_1(1,\alpha) + (-\alpha y_0, y_0)$. Sendo assim, seja $A \subset R$ um aberto intrínseco. Então, $\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(B)$ onde B é um aberto de $\mathbb{T}^2$, garantindo que ϕ é contínua em relação à topologia intrínseca.

$\square$

A propriedade de continuidade que aparece na definição de subvariedade quase-regular se estende à diferenciabilidade em relação à estrutura diferenciável intrínseca:

Proposição 0.1 *Seja* $L \hookrightarrow M$ *uma subvariedade quase-regular e* N *uma variedade diferenciável conexa. Se uma aplicação diferenciável* $\phi : N \to M$ *assume valores em* L *então ela é diferenciável em relação à topologia intrínseca de* L*.*

Demonstração: Tome $y \in N$ e ponha $x = \phi(y) \in L$. Pela forma local das imersões, pode-se supor que L é uma vizinhança V da origem em $\mathbb{R}^k$ e M é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ da forma $V \times W$; a inclusão $L \hookrightarrow M$ fica sendo a inclusão canônica $V \hookrightarrow V \times \{0\}$.

Como L é quase-regular, $\phi^{-1}(V \times \{0\})$ é um aberto de N que contém y. Ao redor de y, ϕ é da forma $\phi : U \to V \times W$ que assume valores em $V \times \{0\}$. Como ϕ é diferenciável, é claro que ϕ é diferenciável a valores em V. □

Corolário 0.2 *Na situação do lema acima, se* $\phi : N \to M$ *é imersão então* $\phi : N \to L$ *também é imersão. Em particular, se* $\dim N = \dim L$ *então* ϕ *é um difeomorfismo local.*

Demonstração: Uma vez que $\phi : N \to L$ é diferenciável, a imagem de sua diferencial está contida no espaço tangente a L e portanto $\phi : N \to L$ é imersão. □

Corolário 0.3 *Se* L *é subvariedade quase-regular com* $\dim L = k$ *então o conjunto pressuposto por* L *admite uma única estrutura de subvariedade imersa de dimensão* k*.*

Demonstração: Aplique o corolário acima à identidade id de L. □