Grupos nilpotentes

1 Álgebras nilpotentes

Definição 1.1 *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Por exemplo, as álgebras abelianas são nilpotentes. Da mesma forma, as seguintes subálgebras de matrizes são nilpotentes

1. $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \}.$

2. $\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} a & & * \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}_{n\times n} \}.$

Por outro lado, a álgebra de todas as matrizes triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}_{n\times n} \}$$

não é nilpotente.

Subálgebras e quocientes de álgebras nilpotentes são também nilpotentes:

Proposição 1.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra nilpotente.*

1. *Se* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é subálgebra então* $\mathfrak{h}$ *é nilpotente.*

2. *Se* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é um ideal então* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *é nilpotente.*

De fato, $\mathfrak{h}^k \subset \mathfrak{g}^k$ se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ e $\pi(\mathfrak{g}^k) = (\pi(\mathfrak{g}))^k$ se π é um homomorfismo.

Proposição 1.3 *O centro de uma álgebra de Lie nilpotente não é trivial.*

De fato, seja k tal que $\mathfrak{g}^k \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$. Então, $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, pois $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1} = 0$.

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra nilpotente, existe um inteiro k tal que todos os colchetes envolvendo k elementos de $\mathfrak{g}$ se anulam. Em particular,

$$[X, \ldots, [X, Y] \ldots] = 0$$

se X aparece $k-1$ vezes, isto é, $\mathrm{ad}(X)^{k-1} = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, nas álgebras nilpotentes, as adjuntas de seus elementos são transformações lineares nilpotentes. A recíproca a esta afirmação também é verdadeira: se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de dimensão finita tal que $\mathrm{ad}(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Este é o conteúdo do teorema de Engel.

2 Grupos nilpotentes simplesmente conexos

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O objetivo aqui é mostrar que se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e G é conexo e simplesmente conexo então $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é um difeomorfismo. Esse fato descreve completamente os grupos de Lie nilpotentes, que são aqueles que têm álgebra de Lie nilpotente.

A fórmula da diferencial da exponencial

$$d(\exp)_X = dE_{e^X} \circ T_X = dE_{e^X} \circ \frac{e^{\mathrm{ad}(X)} - 1}{\mathrm{ad}(X)}$$

garante que, no caso nilpotente, $d(\exp)_X$ é um isomorfismo para todo $X \in \mathfrak{g}$. De fato, como $\mathrm{ad}(X)$ é uma aplicação linear nilpotente, seus auto-valores são todos iguais a 0, o que implica que os auto-valores de T_X são iguais a 1, e daí que T_X e, portanto, $d(\exp)_X$ é injetora. Como as dimensões do domínio e da imagem coincidem, segue que $d(\exp)_X$ é bijetora. Isso garante que exp é um difeomorfismo local. Dessa forma, exp é difeomorfismo se, e somente se, é uma bijeção.

2.1 exp é sobrejetora

A demonstração de que a aplicação exponencial é sobrejetora é feita por indução sobre a dimensão do grupo. Em primeiro lugar, se $\dim G = 1$ e G é simplesmente conexo então tanto G quanto $\mathfrak{g}$ coincidem com $\mathbb{R}$ e exp é a identidade.

O passo de indução requer a seguinte propriedade dos subgrupos normais de um grupo simplesmente conexo.

Lema 2.1 *Seja g um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo e $H \subset G$ um subgrupo de Lie normal e conexo. Então H é fechado.*

Demonstração: A álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H é um ideal de $\mathfrak{g}$, o que permite formar a álgebra quociente $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Seja Q o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{q}$. O homomorfismo canônica $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ induz um homomorfismo $\phi : G \to Q$ tal que $\theta = d\phi_1$. A álgebra de Lie do núcleo $\ker \phi$ coincide com $\ker \theta$, isto é, com $\mathfrak{h}$. Como H e a componente conexa da identidade de $\ker \phi$ têm a mesma álgebra de Lie esses grupos são iguais. Por outro lado, $\ker \phi$ é um subgrupo fechado e daí que $H = (\ker \phi)_0$ também é fechado. □

Votando ao grupo de Lie nilpotente, seja $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ o centro da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. O fato de que $\mathfrak{g}$ é nilpotente garante que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) > 1$ e daí que $\dim (\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) < \dim \mathfrak{g}$. Denote por H o grupo conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Pelo lema H é um subgrupo fechado o que permite construir o grupo quociente G/H, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ também é nilpotente. Portanto, G/H é um grupo nilpotente cuja dimensão é menor que a dimensão de G. A rigor, para aplicar a hipótese de indução e garantir que a aplicação exponencial em G/H é sobrejetora, deve-se mostrar que G/H é simplesmente conexo. Isso pode ser feito, pois um resultado geral garante que o quociente de um grupo nilpotente simplesmente conexo por um subgrupo fechado conexo é simplesmente conexo. Isso no entanto não é necessário pois a hipótese de indução pode ser aplicada ao recobrimento universal $\widetilde{G/H}$ de G/H. Se a aplicação exponencial é sobrejetora em $\widetilde{G/H}$ o mesmo ocorre em G/H, pois o homomorfismo canônico $\widetilde{G/H} \to G/H$ comuta com as exponenciais.

Assumindo então que a exponencial é sobrejetora, tome $g \in G$. Então, existe $\overline{X} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que $\exp_{G/H} \overline{X} = \pi(g)$, onde $\pi : G \to G/H$ denota o homomorfismo canônico. Este homomorfismo comuta as exponenciais, portanto,

$$\pi(\exp_G X) = \exp_{G/H} \overline{X} = \pi(g).$$

Isso significa que $\exp_G X = gh$ com $h \in H$. Porém H é um grupo nilpotente com $\dim H < \dim G$. Pelos mesmos argumentos empregados em relação a G/H a hipótese de indução garante que a aplicação exponencial em H é sobrejetora (novamente aqui, pode-se mostrar que H é simplesmente conexo, mas a passagem ao recobrimento universal de H, é suficiente). Dessa forma, $h = \exp Z$, para $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, isto é, $g = (\exp X)(\exp Z)$. Como $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, segue que

$$g = \exp(X + Z),$$

mostrando que g está na imagem da exponencial, concluindo a demonstração da

Proposição 2.2 *Seja G um grupo conexo cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Então,* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é sobrejetora.*

2.2 exp é injetora

A demonstração de que exp é injetora, no caso simplesmente conexo, será feita mostrando que exp é uma aplicação de recobrimento. Para isso não é necessário supor de antemão que G e simplesmente conexo.

Lema 2.3 *Se A e B são transformações lineares nilpotentes tais que* $\exp A = \exp B$ *então $A = B$.*

Demonstração: Considere as séries formais na variável x com coeficientes reais ou racionais, $\exp x = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}x^k$ e $\log(1+x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$. Substituindo na série do logaritmo x por $\exp x - 1$, verifica-se a igualdade

$$\log(\exp x) = \log(1 + (\exp x - 1)) = x.$$

Quando aplicadas a uma transformação linear nilpotente A ambas as séries são polinômios em A e, portanto, dão origem a transformações lineares bem definidas. A expressão formal garante portanto que se $\exp A = \exp B$ então,

$$A = \log(\exp A) = \log(\exp B) = B.$$

□

Voltando ao grupo nilpotente G, sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $\exp X = \exp Y$. Como $\mathrm{Ad}\left(e^X\right) = e^{\mathrm{ad}(X)}$, segue que

$$\exp(\mathrm{ad}(X)) = \exp(\mathrm{ad}(Y)).$$

Portanto, o lema garante que $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(Y)$, isto é, $\mathrm{ad}(Y - X) = 0$, o que significa que $Y - X$ está no centro de $\mathfrak{g}$. Escrevendo $Z = Y - X$, segue que $\exp Z$ está no centro de G e vale

$$\exp(Y) = \exp(X + Z) = \exp X \exp Z.$$

Mas $\exp(Y) = \exp(X)$, portanto, $\exp Z = 1$. Essas observações servem para descrever as imagens inversas da exponencial.

Lema 2.4 *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, a imagem inversa*

$$\exp^{-1}\{\exp X\} = \{Y \in \mathfrak{g} : \exp(Y) = \exp(X)\}$$

é dada por $X + K$ onde K é o subgrupo discreto (em relação à soma) de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ definido por

$$K = \{Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) : \exp(Z) = 1\}.$$

Demonstração: Falta apenas verificar que K é um subgrupo discreto. É claro que D é um subgrupo pois $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ é abeliano, assim a restrição de exp ao centro é um homomorfismo e K é o núcleo desse homomorfismo. Já K é discreto pois a aplicação exponencial é um difeomorfismo local. $\square$

Agora é possível provar a propriedade de recobrimento.

Proposição 2.5 *Seja G é um grupo de Lie conexo, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é uma aplicação de recobrimento..*

Demonstração: Dado $g \in G$, existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp X = g$. Fixando X, existe uma vizinhança V de 0 tal que exp é um difeomorfismo entre $X + V$ e $U = \exp(X + V)$, pois exp é um difeomorfismo local. Suponha que $y \in \mathfrak{g}$ seja de tal forma que $\exp Y = \exp X$. Então, a restrição de exp a $Y + V$ também é um difeomorfismo. De fato, pela discussão acima $Y = X + Z$ com $Z \in K$, o que implica que

$$\exp(Y + v) = \exp(X + v + Z) = \exp(X + v)\exp Z = \exp(X + v),$$

já que $\exp Z = 1$. Portanto, a menos de translação por Z em $\mathfrak{g}$ as exponenciais coincidem. Além do mais, $\exp(Y+V) = \exp(X+V) = U$.

A imagem inversa $\exp^{-1} U$ é a união dos abertos $X + Z + V$ com $Z \in K$, pois por um lado é claro que $Y + V \subset \exp^{-1} U$. Reciprocamente, se $\exp W \in U$, então existe $v \in V$ tal que $\exp(X+v) = \exp W$, o que implica que $W = X + v + Z'$ com $Z' \in K$. Portanto, $W \in Y' + V$ com $Y' = X + Z' \in X + K$.

Agora basta escolher V conexo e suficientemente pequeno de tal forma que $(Y_1 + V) \cap (Y_2 + V) = \emptyset$ se $Y_1, Y_2 \in X + K$ são diferentes. Esta última condição é equivalente a $K \cap V = \emptyset$. Como K é discreto, existe V conexo satisfazendo essa condição.

Com essa escolha de V as componentes conexas de $\exp^{-1} U$ são da forma $Y + V$, $Y \in X + K$ e são difeomorfas a U, mostrando que exp é uma aplicação de recobrimento. □

Corollary 2.6 *Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e G é conexo e simplesmente conexo, então* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é injetora.*

Demonstração: Imediata a partir da proposição. □

Com isso fica concluída a demonstração de que a aplicação exponencial num grupo de Lie nilpotente conexo e simplesmente conexo é um difeomorfismo. Uma consequência óbvia desse resultado é o seguinte teorema, que generaliza para álgebras de Lie nilpotentes o que já havia sido demonstrado para álgebras abelianas.

Teorema 2.7 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Então, o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\widetilde{G}$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ é difeomorfo a um espaço euclidiano (isto é, $\mathfrak{g}$).*