Capítulo 3

Grupos de Lie

3.1 Definição

Um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto

$$p : (g, h) \in G \times G \longmapsto gh \in G$$

é diferenciável.

Tanto a estrutura de variedade diferenciável de G, quanto a diferenciablidade de p, pressupõem um grau de diferenciabilidade $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \omega$. Para desenvolver boa parte da teoria, é necessário tomar apenas derivadas de primeira ordem em G e no fibrado tangente TG, e assim supor que G e p são de classe $\mathcal{C}^2$. No entanto, não existe perda de generalidade em assumir que G e p são analíticas ($\mathcal{C}^\omega$), pois é possível provar que se p é classe $\mathcal{C}^1$ então p é analítica em relação à estrutura de variedade analítica contida na estrutura $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$.

Dado $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $E_g : G \to G$ e $D_g : G \to G$, são definidas respectivamente por $E_g(h) = gh$ e $D_g(h) = hg$. Essas aplicações são diferenciáveis pois $E_g = p \circ s_{g,1}$ e $D_g = p \circ s_{g,2}$ onde $s_{g,1}(h) = (g, h)$ e $s_{g,2}(h) = (h, g)$ são aplicações diferenciáveis $G \to G \times G$. Na verdade, ambas as translações, à esquerda e à direita, são difeomorfismos, já que $E_g \circ E_{g^{-1}} = D_g \circ D_{g^{-1}} = \mathrm{id}$.

Ao contrário dos grupos topológicos a definição de grupo de Lie não exige *a priori* que a inversão $\iota : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ seja uma aplicação diferenciável ou sequer contínua. A razão para isso é que a diferenciabilidade de p implica a de ι através do teorema da função implícita.

Proposição 3.1 *Num grupo de Lie G a aplicação $\iota : g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ é um difeomorfismo. A diferencial de ι é dada por*

$$d\iota_g = -\left(dE_{g^{-1}}\right)_1 \circ \left(dD_{g^{-1}}\right)_g .$$

Em particular, $(d\iota)_1 = -\mathrm{id}$.

Demonstração: Dado $(g, h) \in G \times G$, a diferencial parcial do produto p em relação à segunda variável é

$$\partial_2 p\,(g, h) = d\left(E_h\right)_g$$

onde $d\,(*)_x$ significa a diferencial de $*$ no ponto x. Como E_h é difeomorfismo, segue que $d\left(E_h\right)_g$ é bijetora e, em particular, sobrejetora. O teorema da função implícita, garante então que para $c \in G$ fixo a equação $p\,(g, h) = c$ tem uma solução diferenciável local $h = \phi_c\,(g)$ de h como função de g. Quando $c = 1$, ϕ_1 é a inversão ι, mostrando que ι é diferenciável. Daí segue que ι é difeomorfismo, pois sua inversa ι^{-1} coincide com ι, isto é, $\iota \circ \iota = \mathrm{id}$.

Ainda pelo teorema da função implícita, a diferencial $d\iota_g$ é dada por

$$d\iota_g = -\left(\partial_2 p\right)^{-1}_{(g,g^{-1})} \circ \left(\partial_1 p\right)_{(g,g^{-1})}$$

onde $\left(\partial_j p\right)_{(x,y)}$ denota a diferencial de p em relação à variável $j = 1, 2$, no ponto (x, y). Essas diferenciais parciais são dadas por $\left(\partial_2 p\right)_{(x,y)} = d\left(E_x\right)_y$ e $\left(\partial_1 p\right)_{(x,y)} = d\left(D_y\right)_x$. Portanto, $\left(\partial_1 p\right)_{(g,g^{-1})} = d\left(D_{g^{-1}}\right)_g$ e $\left(\partial_2 p\right)^{-1}_{(g,g^{-1})} = d\left(E_g\right)^{-1}_{g^{-1}} = d\left(E_{g^{-1}}\right)_1$, mostrando a fórmula do enunciado. No caso em que $g = 1$, $D_1\,(g) = g$ é a aplicação identidade, portanto, $\left(dD_1\right)_1$ é a aplicação identidade do espaço tangente $T_1 G$. Da mesma forma, $\left(dE_1\right)_1 = \mathrm{id}$ e daí que $d\iota_1 : T_1 G \to T_1 G$ é $-\mathrm{id}$. □

Esta proposição mostra que todo grupo de Lie é um grupo topológico.

A seguinte notação simplificada facilita diversos cálculos: seja $t \mapsto g_t$ uma curva diferenciável em G e tome $h \in G$. Então,

$$hg'_t = d\left(E_h\right)_{g_t}\left(g'_t\right) \qquad g'_t h = d\left(D_h\right)_{g_t}\left(g'_t\right).$$

Com essas notações cálculos de derivada em G podem ser feitos como se fossem no grupo de matrizes. Por exemplo, $(g_t^2)' = g_t' g_t + g_t g_t'$ ou ainda de $g_t g_t^{-1} = 1$ obtém-se $\left(g_t g_t^{-1}\right)' = g_t' g_t^{-1} + g_t \left(g_t^{-1}\right)' = 0$. Portanto,

$$\left(g_t^{-1}\right)' = -g_t^{-1} g' g_t^{-1},$$

que é a fórmula para $d\iota_g$ da proposição acima.

As fórmulas a seguir relacionam as translações com a inversão ι.

Proposição 3.2 *Para $g, h \in G$ vale:*

1. $D_g \circ E_h = E_h \circ D_g$.
2. $E_g \circ \iota = \iota \circ D_{g^{-1}}$.
3. $D_g \circ \iota = \iota \circ E_{g^{-1}}$.

Demonstração: Basta aplicar as definições. □

Exemplos:

1. Seja $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$ o grupo das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$, ou o que é a mesma coisa, o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis. Esse grupo é um subconjunto aberto do espaço vetorial $M_n\,(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$, e portanto é uma variedade diferenciável. O produto no grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é proveniente do produto usual de matrizes. Se $X = (x_{ij})$ e $Y \in (y_{ij})$ são matrizes $n \times n$, então $Z = XY = (z_{ij})$ é dado por

   $$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

   que é um polinômio de grau dois nas variáveis x_{ij}, y_{ij} e, portanto, é uma aplicação diferenciável. Por esta razão $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

   Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita, denote por $\mathrm{Gl}\,(V)$ o grupos das transformações lineares inversíveis de V.

Tomando uma base de V define-se um isomorfismo entre $\mathrm{Gl}(V)$ e $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ por $h \in \mathrm{Gl}(V) \mapsto [h] \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ onde $[h]$ denota a matriz de h em relação à base fixada.

Esse grupo serve de exemplo guia no estudo dos grupos de Lie.

2. Qualquer espaço vetorial de dimensão finita V é um grupo de Lie, com a operação $+$ em V.

3. Seja G o grupo das matrizes $n \times n$ triangulares superiores com entradas diagonais iguais a 1:
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Como conjunto G está em bijeção com o espaço vetorial $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Portanto, G tem uma estrutura de variedade diferenciável. Em relação à esta estrutura, o produto em G (produto de matrizes) é diferenciável, tornando G um grupo de Lie.

4. Sejam G e H grupos de Lie. Então, o produto cartesiano $G \times H$ admite a estrutura de variedade produto e a estrutura de grupo produto $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$, tornando $G \times H$ um grupo de Lie.

5. Seja G um grupo qualquer munido da topologia discreta. Com esta topologia G tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão 0 em que o produto é diferenciável. Portanto, todo grupo G pode ser visto como um grupo de Lie. Um grupo de Lie desses é denominado de *grupo de Lie discreto* (Este exemplo é puramente formal, já que a estrutura discreta não acrescenta informação alguma à estrutura de G.)

□

3.2 Álgebra de Lie

O primeiro passo no estudo dos grupos de Lie consiste na construção das álgebras de Lie associadas. Uma álgebra de Lie consiste de espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as propriedades:

1. bilinearidade.

2. Anti-simetria, isto é, $[A,B] = -[B,A]$, para $A, B \in \mathfrak{g}$.

3. Identidade de Jacobi: para $A, B, C \in \mathfrak{g}$,

$$[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]].$$

Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável munido do colchete de Lie de campos de vetores. Já a álgebra de Lie de um grupo de Lie G será definida como uma subálgebra da álgebra de Lie dos campos de vetores sobre G. Antes de introduzir a álgebra de Lie de G convém fazer uma resumo de algumas propriedades dos campos de vetores sobre variedades diferenciáveis.

3.2.1 Preliminares: campos de vetores

Um campo de vetores numa variedade diferenciável M é uma aplicação $X : M \to TM$ que satisfaz $X(x) \in T_xM$ para $x \in M$.

O campo X induz a equação diferencial ordinária em M dada por

$$\frac{dx}{dt} = X(x).$$

Se X é diferenciável, existe para todo $x \in M$ uma única solução maximal com condição inicial $(0,x)$. Essa solução é denotada por $t \mapsto X_t(x)$. O seu domínio de definição é um intervalo $(\alpha,\omega) \subset \mathbb{R}$ que contém 0.

Fixando $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t : x \mapsto X_t(x)$ é um difeomorfismo local de M no sentido em que o domínio $\mathrm{dom}X_t$ de X_t é um aberto de M e $X_t : \mathrm{dom}X_t \to X_t(\mathrm{dom}X_t)$ é um difeomorfismo ($\mathrm{dom}X_t$ é o conjunto dos elementos de M, cuja solução maximal se estende até t, isto é, o seu intervalo de definição contém t). O campo é dito completo se $\mathrm{dom}X_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De forma equivalente, X é completo se todas as soluções maximais estão definidas em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

O conjunto de difeomorfismos locais X_t, $t \in \mathbb{R}$, é denominado de fluxo do campo de vetores. A menos de restrição de domínios, o fluxo satisfaz a propriedade de homomorfismo: $X_{t+s} = X_t \circ X_s$. Em particular, os elementos do fluxo comutam entre si: $X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$ e $X_{-t} = (X_t)^{-1}$.

Em suma, X_t satisfaz as seguintes propriedades que o caracterizam:

1. $X_0 = \mathrm{id}$.
2. $\dfrac{d}{dt} X_t(x) = X(X_t(x))$.
3. $X_{t+s} = X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$.

Sejam X e Y dois campos de vetores. O colchete de Lie entre eles é definido por

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt}\Big(d(X_{-t})_{X_t(x)} (Y(X_t(x))) \Big)_{|t=0}.$$

Se os campos X e Y são de classe $\mathcal{C}^k$ então $[X, Y]$ é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. O colchete de Lie satisfaz as propriedades:

1. anti-simetria: $[X, Y] = -[Y, X]$ e a
2. identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e X um campo de vetores. A derivada direcional de f, em relação a X é a função Xf definida por

$$Xf(x) = df_x(X(x)) = \frac{d}{dt}(f(X_t(x)))_{|t=0}.$$

Se X, Y são campos de vetores, então $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

Em coordenadas locais o colchete de Lie admite a seguinte expressão: suponha que M seja um aberto de $\mathbb{R}^n$. Os espaços tangentes

T_xM, $x \in M$, se identificam a $\mathbb{R}^n$. Via essa identificação, um campo de vetores passa a ser uma aplicação $X : M \to \mathbb{R}^n$. Então,

$$[X,Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x))$$

onde dX_x é a diferencial de $X : M \to \mathbb{R}^n$.

Um difeomorfismo $\phi : M \to N$ entre variedades diferenciáveis transladada um campo X em M a um campo ϕ_*X em N definido por

$$(\phi_*X)(y) = d\phi_{\phi^{-1}(y)}\left(X\left(\phi^{-1}(y)\right)\right).$$

De maneira mais geral, se ϕ é apenas diferenciável, um campo X em M é dito ϕ-projetável se $d\phi_x(X(x)) = d\phi_y(X(y))$ sempre que $\phi(x) = \phi(y)$. Nesse caso $(\phi_*X)(\phi(x)) = d\phi_x(X(x))$ é um campo de vetores bem definido em N.

Em qualquer uma dessas situações, se $\alpha(t)$ é uma trajetória do campo X (solução da equação diferencial correspondente), então $\phi(\alpha(t))$ é uma trajetória de ϕ_*X. Em termos de fluxos isso significa que $\phi \circ X_t = (\phi_*X)_t \circ \phi$.

Seja $\phi : M \to N$ um difeomorfismo e X, Y campos de vetores em M. Então vale a seguinte fórmula para o colchete de Lie:

$$\phi_*[X,Y] = [\phi_*X, \phi_*Y].$$

Usando translações desse tipo com difeomorfismos que fazem parte de um fluxo, isto é, $\phi = X_t$, algum $t \in \mathbb{R}$, obtém-se as seguintes condições equivalentes:

1. dois campos de vetores X e Y comutam, isto é, $[X,Y] = 0$.

2. $(X_t)_* Y = Y$ para todo t.

3. $(Y_t)_* X = X$ para todo t.

4. $X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$.

3.2.2 Campos invariantes

Definição 3.3 *Um campo de vetores X em G é dito invariante à direita se para todo $g \in G$, $(D_g)_* X = X$ (ou de forma mais detalhada, $d(D_g)_h (X(h)) = X(hg)$ para todo $g, h \in G$. De forma análoga, X é dito invariante à esquerda se para todo $g \in G$, $(E_g)_* X = X$.*

Os campos invariantes à direita ou à esquerda são completamente determinados por seus valores na identidade 1, pois para todo $g \in G$ a condição de invariança à direita, por exemplo, implica que $X(g) = d(D_g)_1 (X(1))$. Portanto, cada elemento do espaço tangente T_1G determina um único campo invariante à direita e um único campo invariante à esquerda.

Dado $A \in T_1G$ a notação A^d indica o campo invariante à direita tal que $A^d(1) = A$. Já A^e denota o campo invariante à esquerda correspondente. Explicitamente,

$$A^d(g) = d(D_g)_1 (A) \qquad A^e(g) = d(D_g)_1 (A).$$

Denote por Inv^d o conjunto dos campos invariantes à direita. Este conjunto é um subespaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) do espaço de todos os campos de vetores em G, já que $(D_g)_*$ é uma aplicação linear sobre os campos de vetores. Analogamente, o conjunto Inv^e dos campos invariantes à esquerda também é um subespaço vetorial (em geral, diferente do subespaço dos campos invariantes à direita). As aplicação $A \in T_1G \mapsto A^d \in \mathrm{Inv}^d$ e $A \in T_1G \mapsto A^e \in \mathrm{Inv}^e$ são isomorfismos entre os espaços vetoriais correspondentes.

Exemplos:

1. Seja $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ o grupo linear geral, que é um conjunto aberto do espaço vetorial das matrizes $M_n(\mathbb{R})$. Fixando $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $E_g(h) = gh$ e $D_g(h) = hg$, podem ser estendidas a todo o espaço de matrizes, dando origem a transformações lineares de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. O fibrado tangente a G se identifica com $G \times M_n(\mathbb{R})$. Daí que um campo de vetores X em G é nada mais nada menos que uma aplicação $X : G \to M_n(\mathbb{R})$. Além do mais, por essa identificação, as transformações lineares

E_g e D_g satisfazem $d(E_g)_h = E_g$ e $d(D_g)_h = D_g$ para quaisquer $g, h \in G$.

A partir dessas observações é possível descrever os campos invariantes em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Suponha que $X : G \to M_n(\mathbb{R})$ é invariante à direita. Então, para todo $g \in G$,

$$X(g) = d(D_g)_1(X(1)) = D_g(X(1)) = X(1)g.$$

Portanto, os campos invariantes à direita são da forma $X(g) = Ag$ com A uma matriz em T_1G. A equação diferencial definida por X é o sistema linear

$$\frac{dg}{dt} = Ag$$

no espaço das matrizes. De forma análoga, os campos invariantes à esquerda são da forma $X(g) = gA$ que estão associados aos sistemas lineares $\dfrac{dg}{dt} = gA$.

Em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ existem campos invariantes à esquerda que não são invariantes à direita e vice-versa. De fato, suponha que o campo $X(g) = Ag$ coincide com o campo $Y(g) = gB$, isto é, $Ag = gB$ para todo $g \in G$. Em particular, para $g = 1$, deve-se ter $A = B$. Daí que $Ag = gA$ e, portanto, A comuta com todas as matrizes em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Mas, isso ocorre se, e somente se, $A = a \cdot 1$, $a \in \mathbb{R}$, isto é, A é uma matriz escalar. Portanto, o campo invariante à esquerda $X(g) = Ag$ não é invariante à direita se A não é uma matriz escalar.

2. Seja $G = (\mathbb{R}^n, +)$. Fixando $v \in \mathbb{R}^n$, as translações à esquerda e à direita são
$$E_v(x) = D_v(x) = x + v.$$
Portanto, $d(E_v)_y = d(D_v)_y = \mathrm{id}$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Isso significa que os campos invariantes são constantes, isto é, $X(x) = v$, com $v \in \mathbb{R}^n$ fixado.

□

A álgebra de Lie de um grupo de Lie é definida em qualquer um dos espaços de campos invariantes Inv^d ou Inv^e munido com o colchete de Lie. O lema a seguir coloca isso em termos precisos.

Lema 3.4 *Sejam X e Y campos invariantes à direita num grupo de Lie G. Então o colchete de Lie $[X, Y]$ é invariante à direita. A mesma afirmação vale para campos invariantes à esquerda.*

Demonstração: É consequência da seguinte fórmula geral: sejam M uma variedade, X, Y campos de vetores em M e ϕ um difeomorfismo de M. Então $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$. Aplicando esta fórmula a $\phi = D_g$ (ou E_g) e X, Y, campos invariantes, chega-se à invariança do colchete. □

Dito de outra maneira, os espaços Inv^d e Inv^e são subálgebras de Lie da álgebra de Lie de todos os campos de vetores em G. Em particular, ambos os espaços vetoriais admitem estruturas de álgebra de Lie. A álgebra de Lie do grupo G é qualquer uma das álgebras de Lie Inv^d ou Inv^e. Os argumentos a seguir mostram que essas álgebras de Lie são, em essência, as mesmas, não existindo, portanto, nenhuma ambiguidade na terminologia.

O espaço tangente T_1G é isomorfo tanto a Inv^d quanto a Inv^e. Através dos isomorfismos o colchete de Lie restrito aos subespaços de campos invariantes induz colchetes $[\cdot, \cdot]_d$ e $[\cdot, \cdot]_e$ em T_1G. Esses colchetes são dados por $[A, B]_d = [A^d, B^d](1)$ e $[A, B]_e = [A^e, B^e](1)$, $A, B \in T_1G$. O seguinte lema permite relacioná-los.

Lema 3.5 *Sejam $A \in T_1G$ e $\iota(g) = g^{-1}$ a inversão em G. Então, $(\iota)_*\left(A^d\right) = (-A)^e$ (em detalhes: $(d\iota)_{g^{-1}}\left(A^d(g)\right) = -A^e(g)$) e $(\iota)_*(A^e) = (-A)^d$*

Demonstração: Escreva $Y = (\iota)_*\left(A^d\right)$. Então,

$$(E_g)_*(Y) = (E_g)_*(\iota)_*\left(A^d\right).$$

Usando a regra da cadeia e a igualdade $E_g \circ \iota = \iota \circ D_{g^{-1}}$, segue que $(E_g)_*(Y) = (\iota \circ D_{g^{-1}})_*\left(A^d\right)$. Este segundo membro é igual a $(\iota)_*\left(A^d\right) = Y$, pela a regra da cadeia e pelo fato que A^d é invariante à direita. Portanto, $(E_g)_*(Y) = Y$ e daí que Y é invariante à esquerda. Agora, $Y(1) = (d\iota)_1 \left(A^d(1)\right)$. Mas $A^d(1) = A$ e $(d\iota)_1 = -\mathrm{id}$, daí que $Y(1) = -A$, mostrando que $Y = A^e$. A outra igualdade é provada da mesma maneira. □

Proposição 3.6 *Sejam $A, B \in T_1G$. Então, $[A,B]_d = -[A,B]_e$.*

Demonstração: Por definição $[A,B]_d = [A^d, B^d](1)$. Aplicando $d\iota_1 = -\mathrm{id}$ a essa igualdade obtém-se

$$-[A,B]_d = (d\iota)_1 [A,B]_d = (d\iota)_1 \left([A^d, B^d](1)\right).$$

Mas, pelo lema anterior, $\iota_*[A^d, B^d] = [\iota_* A^d, \iota_* B^d] = [A^e, B^e]$. Daí que

$$-[A,B]_d = [A^e, B^e](1) = [A,B]_e,$$

concluindo a demonstração. □

Alterando um pouco o ponto de vista, esta proposição, mostra que as estruturas de álgebra de Lie em T_1G induzidas por Inv^d e Inv^e são isomorfas, no sentido em que existe uma aplicação linear inversível $L : T_1G \to T_1G$ tal que $L[A,B]_d = [LA, LB]_e$. De fato, tome $L = -\mathrm{id}$. Então, $L[A,B]_d = -[A,B]_d$ enquanto que $[LA, LB]_e = [A,B]_e$, portanto $-\mathrm{id}$ é um isomorfismo pela proposição. Visto ainda de outra maneira, a proposição anterior mostra que a aplicação ι_* define um isomorfismo entre Inv^d e Inv^e munidos do colchete de Lie de campos de vetores.

Definição 3.7 *A álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$ ou $\mathrm{Lie}(G)$, é qualquer uma das álgebras isomorfas Inv^d, Inv^e, $(T_1G, [\cdot,\cdot]_d)$ ou ainda $(T_1G, [\cdot,\cdot]_e)$.*

Para o desenvolvimento da teoria pode-se escolher qualquer uma das álgebras de Lie concretas para representar $\mathfrak{g}$. A diferença principal está, é claro, na escolha entre invariança à direita e à esquerda. Dependendo da realização que for tomada, algumas fórmulas são alteradas, mudando a ordem em que aparecem os elementos que a constituem. No entanto, escolhendo de antemão o tipo de campo invariante, todas as fórmulas são desenvolvidas de forma coerente. Um critério para a escolha entre os campos invariantes à esquerda ou à direita surge no momento de estudar ações de grupos. Se forem consideradas ações à esquerda (o que ocorre quando se escreve o valor uma função f como $f(x)$) então os campos que interessam são os invariantes à direita. Já em ações à direita (quando se escreve uma função como $(x) f$), o que conta são os campos invariantes esquerda.

Exemplos:

1. Os campos invariantes à direita e $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ são da forma $X_A(g) = Ag$, com A uma matriz $n \times n$, enquanto que os invariantes à esquerda são da forma $Y_A(g) = gA$.

   Em coordenadas locais o colchete de Lie de dois campos é dado por
   $$[X, Y] = dY(X) - dX(Y).$$
   Para uma matriz A, X_A se estende uma aplicação linear no espaço das matrizes. Portanto, $dX_A = X_A$. Assim, aplicando essa fórmula do colchete a X_A e X_B, obtém-se
   $$[X_A, X_B](g) = B(Ag) - A(Bg),$$
   isto é, $[X_A, X_B] = X_{BA-AB}$. Por outro lado, o colchete de Lie de campos invariantes à esquerda é dado por $[Y_A, Y_B] = X_{AB-BA}$.

2. Os campos invariantes em $(\mathbb{R}^n, +)$ são os campos constantes. Como o colchete de Lie de campos constantes é zero (como segue da fórmula mencionada acima), a álgebra de Lie do grupo abeliano $(\mathbb{R}^n, +)$ é abeliana, isto é, satisfaz $[\cdot, \cdot] \equiv 0$.

3. Se G e H são grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente então a álgebra de Lie de $G \times H$ é $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, onde o colchete é dado por
   $$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]).$$

4. Se G é um grupo de Lie discreto, $\dim G = 0$ e, portanto, $\mathfrak{g} = \{0\}$.

$\square$

3.3 Aplicação exponencial

A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é o objeto central usado para transportar ao grupo de Lie G propriedades de sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A idéia básica de sua construção é que, por definição, os elementos de $\mathfrak{g}$ são equações diferenciais ordinárias em G (campos invariantes), que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de G. Os elementos formadores desses fluxos se identificam naturalmente a elementos de G, permitindo construir, a partir de $X \in \mathfrak{g}$, um subgrupo de G parametrizado por $t \in \mathbb{R}$. A aplicação exponencial é construida a partir desses subgrupos a 1-parâmetro, isto é, parametrizados por $\mathbb{R}$.

Para colocar esses comentários de maneira precisa, seja X um campo invariante (à esquerda ou à direita em G). Denote por X_t o seu fluxo. Em princípio X_t é um fluxo local, isto é, para t fixado, o domínio de X_t é o subconjunto aberto de G das condições iniciais que se prolongam até t.

A invariança de X acarreta a seguinte simetria do fluxo X_t: suponha, por exemplo, que $X \in \mathrm{Inv}^d$, tome $g, h \in G$ e considere a curva $\alpha(t) = D_g(X_t(h)) = X_t(h)\,g$. O seu domínio é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, contendo 0. Como $X_0(h) = h$, $\alpha(0) = hg$. Além do mais,

$$\alpha'(t) = d(D_g)_{X_t(h)}(X(X_t(h))) = X(X_t(h)),$$

pois X é invariante à direita. Portanto, α é solução de $dg/dt = X(g)$ com condição inicial $\alpha(0) = hg$, isto é, $\alpha(t) = X_t(hg)$. Isso significa que

$$X_t(hg) = X_t(h)\,g \qquad X \in \mathrm{Inv}^d.$$

Tomando em particular $h = 1$, fica $X_t(g) = X_t(1)\,g$. Isto é, a solução que passa por g é obtida por translação da solução que passa pelo elemento neutro. De maneira análoga, se mostra que $gY_t(h) = Y_t(gh)$ (e $Y_t(g) = gY_t(1)$) se Y é campo invariante à esquerda. Como as trajetórias são obtidas umas das outras por translação, elas se prolongam pelo mesmo intervalo de $\mathbb{R}$. Isso permite mostrar que os campos invariantes são completos, isto é, suas trajetórias se prolongam sobre todo $\mathbb{R}$.

Proposição 3.8 *Um campo invariante (à esquerda ou à direita) é completo. Além do mais, se $A \in T_1G$, então $\left(A^d\right)_t(1) = (A^e)_t(1)$ para* *todo* $t \in \mathbb{R}$ *e a aplicação* $t \in \mathbb{R} \mapsto \left(A^d\right)_t (1) \in G$ *é um homomorfismo do grupo aditivo* $\mathbb{R}$ *a valores em* G.

Demonstração: Seja X um campo invariante à direita. Para mostrar que X é completo basta mostrar que a trajetória $X_t (1)$ que passa pelo elemento neutro em $t = 0$ se prolonga por todo $\mathbb{R}$. Seja (α, ω) o domínio de definição da solução maximal $t \mapsto X_t (1)$. Suponha por absurdo que $\omega < +\infty$. Então, $X_{\omega/2} (1)$ é bem definido e a trajetória $s \mapsto X_s \left(X_{\omega/2} (1)\right)$ se prolonga sobre (α, ω), pois todas as trajetórias de um campo invariante se prolongam ao mesmo intervalo. Esse prolongamento permite definir a curva $\sigma : (\alpha, 3\omega/2) \to G$ por

$$\sigma (t) = \begin{cases} X_t (1) \ \text{ se } \ t \in (\alpha, \omega/2] \\ X_{t-\omega/2} \left(X_{\omega/2} (1)\right) \ \text{ se } \ t \in (\omega/2, 3\omega/2). \end{cases}$$

É claro que $\sigma (0) = 1$, assim para chegar a uma contradição basta mostrar que $\sigma (t)$ é solução de $dg/dt = X (g)$. Por construção, $\sigma' (t) = X (\sigma (t))$ para $t \in (\alpha, \omega/2]$ ou $t \in (\omega/2, 3\omega/2)$. Quanto a $t = \omega/2$, deve-se observar que $\sigma (t) = X_t (1)$ se $t \in (\alpha, \omega)$, pois se $t \in (\omega/2, \omega)$ então $X_{t-\omega/2} \left(X_{\omega/2} (1)\right) = X_{t-\omega.2+\omega.2} (1) = X_t (1)$, pela propriedade de fluxo. Daí que $\sigma' (t) = X (\sigma (t))$ também em $t = \omega/2$. Portanto, σ é uma solução de $dg/dt = X (g)$ que se prolonga a $(\alpha, 3\omega/2)$ contradizendo (α, ω) é o intervalo da solução maximal passando por 1. Com isso fica mostrado que $\omega = +\infty$. Da mesma forma se verifica que $\alpha = -\infty$, concluindo a demonstração de que X é completo.

A propriedade de homomorfismo é agora imediata:

$$X_{t+s} (1) = X_t (X_s (1)),$$

já que X_t é fluxo. Por outro lado, se, por exemplo X é invariante à direita então $X_t (1 X_s (1)) = X_t (1) X_s (1)$, mostrando que

$$X_t (1) X_s (1) = X_{t+s} (1) = X_{s+t} (1) = X_s (1) X_t (1).$$

Por fim, falta verificar que as trajetórias de A^d e A^e que passam pelo elemento neutro coincidem. Para isso basta verificar que a curva $\delta (t) = \left(A^d\right)_t (1)$ é solução do campo invariante à esquerda, isto é, satisfaz $\delta' (t) = A^e (\delta (t))$, pois $\delta (0) = 1$. Pela propriedade de homomorfismo,

$\delta(t+s) = \delta(t)\delta(s) = \delta(s)\delta(t)$. Mas, $\delta'(t) = \dfrac{d}{ds}\delta(t+s)_{|s=0}$. Usando cada uma das expressões para $\delta(t+s)$, obtém-se

$$\delta'(t) = \left(dD_{\delta(t)}\right)_1(\delta'(0)) = \left(dE_{\delta(t)}\right)_1(\delta'(0)).$$

Como $\delta'(0) = A$, segue que $\delta(t)$ é trajetória de ambos os campos A^d e A^e, concluindo a demonstração. □

Essa descrição das trajetórias dos campos invariantes permite definir a aplicação exponencial.

Definição 3.9 *Seja $A \in T_1G$. Então,* $\exp A = \left(A^d\right)_1(1) = (A^e)_1(1)$.

A aplicação exponencial é da forma $\exp : \mathfrak{g} \to G$. A definição pressupõe que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está sendo vista como o espaço tangente ao elemento neutro. Pelas identificações acima, se X é um campo invariante $\exp X$ faz sentido e é o valor em $1 \in \mathbb{R}$ da solução de X que passa pelo elemento neutro quando $t = 0$. Em virtude da proposição acima, a aplicação $t \mapsto \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, é um homomorfismo. Portanto,

$$\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$$

é um subgrupo de G, denominado de *subgrupo a* 1*-parâmetro* gerado por X.

A seguinte proposição reúne algumas propriedades da aplicação exponencial e dos fluxos dos campos invariantes.

Proposição 3.10 *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se X é invariante à direita então $X_t = E_{\exp(tX)}$, isto é, $X_t(g) = \exp(tX)\,g$.*

2. *Se X é invariante à esquerda então $X_t = D_{\exp(tX)}$, isto é, $X_t(g) = g\exp(tX)$.*

3. $\exp 0 = 1$.

4. *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, e $t, s \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(t+s)X = \exp(tX)\exp(sX) = \exp(sX)\exp(tX),$$

isto é, os elementos do subgrupo $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ comutam entre si.

5. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então, $[X,Y] = 0$ se, e só se, $\exp tX \exp sY = \exp sY \exp tX$.*

Demonstração: Apenas a última propriedade não foi provada ainda. Mas ela é consequência da propriedade geral de campos de vetores que afirma que seus fluxos comutam se, e só se, o colchete de Lie entre eles se anula em todos os pontos. □

O item 4 desta proposição garante que $(\exp X)^n = \exp(nX)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

Exemplos:

1. Como foi visto os campos invariantes à direita em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ são da forma $X(g) = Ag$, com A matriz $n \times n$. A equação diferencial associada a X é o sistema linear

$$\frac{dg}{dt} = Ag$$

no espaço das matrizes. Sua solução fundamental é dada pela exponencial de matrizes, que coincide, portanto, com a aplicação exponencial em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

2. Em $(\mathbb{R}^n, +)$ os campos invariantes são constantes: $X(x) = x + v$. O fluxo de um campo desses é dado pelas translações $X_t(x) = x + tv$. Tomando $x = 0$, vê-se que

$$\exp(tv) = tv.$$

Em particular, $\exp(v) = v$ e $\exp = \mathrm{id}$.

3. Se G e H são grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ respectivamente então $\exp(X,Y) = (\exp X, \exp Y)$ se $(X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, a álgebra de Lie de $G \times H$.

□

Além das propriedades algébricas da aplicação exponencial, enunciadas na proposição 3.10, sua diferenciabilidade também é relevante. A aplicação exponencial foi definida através da solução da equação diferencial $dg/dt = X(g)$, com X campo invariante. O conjunto das equações definidas (por exemplo) pelos campos invariantes à direita pode ser colocada numa única equação dependente do parâmetro $A \in T_1G$, escrevendo

$$\frac{dg}{dt} = f(A, g) \tag{3.1}$$

onde $f : T_1G \times G \to TG$ é dada por $f(A, g) = (dD_g)_1(A)$. No caso em que G e p são de classe pelos menos $\mathcal{C}^2$, f é de classe $\geq \mathcal{C}^1$. Portanto as soluções de (3.1) dependem diferenciavelmente do parâmetro A. Isso significa que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é uma aplicação diferenciável.

A diferencial de exp é amplamente utilizada no desenvolvimento da teoria. Existe uma fórmula para essa diferencial em termos de uma série cujos termos sucessivos são colchetes de elementos em $\mathfrak{g}$. Essa fórmula será demonstrada posteriormente. Um de seus casos particulares é a expressão enunciada abaixo para a diferencial da exponencial na origem $0 \in \mathfrak{g}$. Para ler a expressão a ser escrita deve-se levar em conta que $\exp 0 = 1$, assim, $(d\exp)_0$ é uma aplicação linear $\mathfrak{g} \to T_1G = \mathfrak{g}$.

Proposição 3.11 $(d\exp)_0 = \mathrm{id}$.

Demonstração: Dado $A \in \mathfrak{g}$, $(d\exp)_0(A) = \frac{d}{dt}\exp(0 + tA)_{|t=0}$. Mas essa derivada é exatamente A pois a curva $\exp(tA)$ é solução de $dg/dt = A^d(g)$. Portanto, $(d\exp)_0(A) = A$, concluindo a demonstração. □

Corolário 3.12 *Existem uma vizinhança U de $0 \in \mathfrak{g}$ e uma vizinhança V de 1 em G tal que $\exp|U : U \to V$ é um difeomorfismo.*

Demonstração: Segue do teorema da função inversa e do fato que $(d\exp)_0 = \mathrm{id}$ é inversível. □

Corolário 3.13 *Seja G um grupo de Lie conexo e tome $g \in G$. Então, existem $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{g}$ tal que*

$$g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_s).$$

Demonstração: Como G é conexo, a vizinhança V do corolário anterior gera G, isto é,

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

Um elemento de V^n é da forma $g_1 \cdots g_n$ com $g_i = \exp X_i \in V$. Portanto, um elemento de V^n é um produto de exponenciais, o mesmo ocorrendo com $g \in G$ arbitrário. □

De acôrdo com o corolário 3.12 a aplicação $\exp^{-1} : V \to U$ é um difeomorfismo entre um aberto de G e um aberto de um espaço vetorial. Portanto, $\exp^{-1}$ pode ser considerada uma carta, ou sistema de coordenadas local, de G. Essa carta é denominada de *sistema de coordenadas de primeira espécie.* Um outro tipo de sistema de coordenadas nas vizinhanças de 1 é dada pela seguinte aplicação: tome uma base $\{X_1\}$ de $\mathfrak{g}$ e considere a aplicação

$$\psi : (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N \longmapsto e^{t_1 X_1} \cdots e^{t_N X_N} \in G.$$

Ela satisfaz $\psi(0) = 1$ e $d\psi_0 = \mathrm{id}$. Portanto, em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^N$, ψ é um difeomorfismo. Uma aplicação dessas é chamada de *sistema de coordenadas de primeira espécie.*

3.4 Homomorfismos

Sejam G e H dois grupos de Lie. Um homomorfismo $\phi : G \to H$ diferenciável entre G e H é chamado às vezes de *homomorfismo de grupos de Lie.* A mesma terminologia se aplica a isomorfismos e automorfismos entre grupos de Lie.

Levando em conta o principio de que os grupos de Lie devem ser estudados através das álgebras de Lie, os homomorfismos entre grupos de Lie serão descritos através dos homomorfismos entre suas álgebras de Lie. Um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ é uma aplicação linear $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que satisfaz $\theta[X,Y] = [\theta X, \theta Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. A relação entre os homomorfismos de grupos e álgebras de Lie é fornecida pela diferencial no elemento neutro. Essa relação será provada a seguir usando algumas fórmulas envolvendo homomorfismos de grupos e exponenciais.

Antes de mais nada, deve-se observar que se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos então para todo $g \in G$ valem as igualdades:

$$\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi \qquad \phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi.$$

Lema 3.14 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável e tome $X \in \mathfrak{g}$. Então, para todo $g \in G$, vale*

$$d\phi_g \left(X^d(g)\right) = Y^d(\phi(g))$$

onde $Y = d\phi_1(X)$.

Demonstração: Como X^d é campo invariante à direita,

$$d\phi_g \left(X^d(g)\right) = d\phi_g \circ d(D_g)_1(X) = d(\phi \circ D_g)_1(X).$$

Mas, $\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi$. Portanto,

$$d(\phi \circ D_g)_1(X) = d\left(D_{\phi(g)} \circ \phi\right)_1(X) = d\left(D_{\phi(g)}\right) \circ d\phi_1(X)$$

e daí que $d\phi_g \left(X^d(g)\right) = d\left(D_{\phi(g)}\right) \circ d\phi_1(X) = Y^d(\phi(g))$, que é a igualdade do enunciado. □

Proposição 3.15 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável e tome $X \in \mathfrak{g}$. Então,*

$$\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_1(X)).$$

Demonstração: Considere a curva $\alpha : \mathbb{R} \to H$ dada por $\alpha(t) = \phi(\exp(tX))$. Essa é uma curva diferenciável e satisfaz

$$\alpha'(t) = d\phi_{\exp(tX)}\left(X^d(\exp(tX))\right)$$

já que a derivada $\exp(tX)$ é curva integral do campo invariante à direita X^d, por definição da exponencial. Pelo lema acima, segue que

$$\alpha'(t) = Y^d(\phi(\exp(tX))),$$

onde $Y = d\phi_1(X)$. Portanto, α é curva integral do campo Y^d. Como $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) = \exp(td\phi_1(X))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, é igualdade do lema é obtida tomando $t = 1$. □

Lema 3.16 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Suponha que $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável e tome $X \in \mathfrak{g}$. Então,*

$$d\phi_1 \circ d(E_{e^{-X}})_{e^X} \circ d(D_{e^X})_1 = d(E_{e^{-Z}})_{e^Z} \circ d(D_{e^Z})_1 \circ d\phi_1$$

onde $Z = d\phi_1(X)$.

Demonstração: Como $\phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi$ e $\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi$ a regra da cadeia implica que a fórmula do lema vale com $\phi(\exp X)$ no lugar de $\exp Z$. Mas, a proposição 3.15 garante que $\phi(\exp X) = \exp Z$. □

Proposição 3.17 *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável. Então $d\phi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é homomorfismo.*

Demonstração: Como $d\phi_1$ é linear, basta mostrar a propriedade de homomorfismo:

$$d\phi_1[X, Y] = [d\phi_1 X, d\phi_1 Y].$$

Pela expressão para o fluxo na proposição 3.10, a definição de colchete de Lie, mostra que

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\left(d(E_{e^{-tX}})_{e^{tX}} \circ d(D_{e^X})_1(Y)\right)_{|t=0}.$$

Aplicando $d\phi_1$ a esta igualdade, o lema anterior, juntamente com a fórmula para $[d\phi_1(X), d\phi_1(Y)]$, mostra a propriedade de homomorfismo de $d\phi_1$. □

Corolário 3.18 *Nas condições da proposição anterior, suponha que H é conexo e $d\phi_1$ é sobrejetora. Então, ϕ é uma aplicação sobrejetora e aberta.*

Demonstração: O teorema da aplicação aberta garante que se $d\phi_1$ é sobrejetora então existe uma vizinhança aberta U da identidade tal que a restrição de ϕ a U é uma aplicação aberta. Em particular, $\phi(U)$ é aberto e, portanto, a imagem de ϕ é um subgrupo de interior não vazio. Mas, por hipótese H é conexo e daí que a imagem de ϕ coincide com H.

Seja $V \subset G$ um aberto e tome $x \in V$. Então, existe um aberto $W \subset U$ tal que $xW \subset V$. Como ϕ é homomorfismo, $\phi(xW) = \phi(x)\phi(W)$. Mas, por construção de U, $\phi(W)$ é aberto e daí que $\phi(x)\phi(W)$ é um aberto contendo $\phi(x)$ e contido em $\phi(V)$, mostrando que $\phi(V)$ é aberto e, portanto, ϕ é aplicação aberta. □

A proposição acima significa que homomorfismos de grupos de Lie induzem homomorfismos entre as álgebras de Lie correspondentes. O procedimento inverso, isto é, a construção homomorfismos de grupos que "estendem" homomorfismos de álgebras de Lie, nem sempre é possível, isto é, se G e H são grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente, e $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, nem sempre existe um homomorfismo $\phi : G \to H$ tal que $\theta = d\phi_1$. Por exemplo, tome $G = \mathbb{S}^1$ e $H = \mathbb{R}$. Então, $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} = 1$, e, portanto, existem isomorfismos entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Mas, nenhum isomorfismo é da forma $d\phi_1$, pois o único homomorfismo $G \to H$ é constante, já que $\mathbb{S}^1$ é compacto e $\{0\}$ é o único subgrupo de $\mathbb{R}$ contido num compacto. O que está em jogo aqui são as propriedades topológicas globais do grupo G. Como será visto, no caso em que G é simplesmente conexo, todo homomorfismo cujo domínio é a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G se estende a um homomorfismo diferenciável com domínio G. Independente da existência de homomorfismos globais, sempre é possível realizar uma construção local, como será visto posteriormente.

Exemplo: O determinante $\det : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo sobre o grupo multiplicativo real. Esse homomorfismo é diferenciável. Para obter $d(\det)_1$ tome uma matriz X e uma curva

$g_t = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $g_0 = 1$ e $a'_{ij}(0) = X$. A derivada do produto

$$\det(g_t) = \sum_\sigma (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)}(t) \cdots a_{n\sigma(n)}(t)$$

em $t = 0$ vale $\mathrm{tr}X$. Portanto, $d(\det)_1(X) = \mathrm{tr}X$. Como pode ser verificado diretamente, a aplicação $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}X \in \mathbb{R}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. □

3.4.1 Representações

Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é quando o contra-domínio é um grupo linear $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Nesse caso, o homomorfismo é chamado de representação do grupo. De maneira mais geral, uma *representação* de um grupo G num espaço vetorial V é uma ação ρ de G em V tal que todas as transformações $\rho(g)$ são aplicações lineares de V. A partir das propriedades das ações se vê que cada $\rho(g)$ é inversível e que $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ é um homomorfismo, onde $\mathrm{Gl}(V)$ denota o grupo das transformações lineares inversíveis de V. A representação é contínua ou diferenciável, de acôrdo com as propriedades correspondentes da ação. Posteriormente, será mostrado que toda representação contínua de dimensão finita é, na verdade, diferenciável.

O espaço V é chamado de *espaço da representação* e $\dim V$ sua dimensão.

Seja ρ é uma representação de dimensão finita (diferenciável) de G em V. A álgebra de Lie do grupo $\mathrm{Gl}(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, ela coincide com o espaço vetorial das transformações lineares $V \to V$ com o colchete dado pelo comutador. A diferencial de ρ na identidade $d\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e como tal uma representação em V da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Essa representação é denominada *representação infinitesimal* associada a ρ. É comum denotar a representação infinitesimal com a mesma notação (isto é, $\rho = d\rho_1$). A fórmula que relaciona as duas representações é dada pela proposição 3.15:

$$\rho(\exp X) = \exp(d\rho_1(X)). \tag{3.2}$$

A exponencial no segundo membro é a do grupo linear e, portanto, pode ser escrita como a soma de uma série de potências.

Exemplos:

1. Seja $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Sua representação canônica em $\mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade. A representação infinitesimal correspondente também é a identidade, isto é, associa a um elemento de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ a transformação linear correspondente de $\mathbb{R}^n$. Essa afirmação segue de
$$\frac{d}{dt}(\exp(tX))_{|t=0} = X.$$

2. Novamente, seja $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e considere o produto tensorial
$$T_k = \bigotimes^k \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n$$
e, para $g \in G$, defina a transformação linear $\rho_k(g) : T_k \to T_k$, de tal forma que nos produtos tensoriais $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, vale
$$\rho_k(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k.$$
A aplicação ρ_k é uma representação de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Sua representação infinitesimal é calculada pela derivada
$$\frac{d}{dt}\left(e^{tX} v_1 \otimes \cdots \otimes e^{tX} v_k\right)_{|t=0} = \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes X v_i \otimes \cdots \otimes v_k.$$

$\square$

3.4.2 Representações adjuntas

Existe uma representação natural de um grupo de Lie G em sua álgebra de Lie. Essa representação é construida da seguinte forma: um elemento $g \in G$ define o automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. É claro que $C_g(1) = 1$, portanto $d(C_g)_1$ é uma aplicação linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Dados $g, h \in G$, $C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$. Isso implica que $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1 = d(G_{gh})_1$ e daí que a aplicação $g \mapsto d(C_g)_1$ é uma representação de G em $\mathfrak{g}$.

Definição 3.19 *A* representação adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$*, de* G *em sua álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é definida por* $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1 = d(E_g \circ D_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}} \circ E_g)_1$.

De acôrdo com a proposição 3.17, $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$. Além do mais vale a seguinte fórmula, que é bastante usada em relações envolvendo a adjunta:

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g) X). \tag{3.3}$$

A representação infinitesimal de Ad é uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em si mesma, isto é, um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Como será demonstrado a seguir, a representação infinitesimal é nada mais nada menos que a representação adjunta de $\mathfrak{g}$:

Definição 3.20 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Sua* representação adjunta*, é a aplicação* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *definida por*

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y].$$

A identidade de Jacobi garante que a aplicação ad é de fato um homomorfismo de álgebras de Lie, onde o colchete em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é dado pelo comutador.

Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é denominada *derivação*, se

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

A propriedade de Jacobi para colchetes em álgebras de Lie garante que as aplicações $\mathrm{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, são derivações de $\mathfrak{g}$. Elas são denominadas de *derivações internas* de $\mathfrak{g}$.

Proposição 3.21 *Seja* G *um grupo de Lie, com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda. Então, a representação infinitesimal associada à sua representação adjunta* Ad *é a representação adjunta* ad *de* $\mathfrak{g}$*. Em outras palavras, valem as fórmulas:*

1. $d(\mathrm{Ad})_1(X) = \mathrm{ad}_e(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.
2. $\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}_e(X))$.

(O subíndice e foi colocado para enfatizar que o colchete é dado pelos campos invariantes à esquerda).

Demonstração: Seja X um campo invariante à esquerda. Então, $d\left(\mathrm{Ad}\right)_1(X)$ é uma aplicação linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Para calculá-la, seja Y outro campo invariante á esquerda. Para $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)(Y) &= d\left(E_{\exp(tX)} \circ D_{\exp(-tX)}\right)_1(Y) \\ &= d\left(D_{\exp(-tX)}\right)_{\exp(tX)}\left(d\left(E_{\exp(tX)}\right)_1(Y)\right). \end{aligned}$$

Como Y é campo invariante à esquerda, $d\left(E_{\exp(tX)}\right)_1(Y) = Y\left(\exp\left(tX\right)\right)$. Agora, o fluxo X_t de X é dado por $X_t = D_{\exp(tX)}$. Usando esse fluxo a igualdade acima se reescreve como

$$\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)(Y) = d\left(X_{-t}\right)_{X_t(1)}\left(Y\left(X_t\left(1\right)\right)\right).$$

Portanto, $\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)(Y)\right)_{|t=0} = [X, Y](1)$, pela fórmula que define o colchete de Lie de dois campos de vetores. Esta igualdade significa que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}\left(\exp\left(tX\right)\right)\right)_{|t=0} = \mathrm{ad}_e(X),$$

mostrando que ad é a representação infinitesimal associada a Ad. A segunda fórmula do enunciado é um caso particular de (3.2), que vale para representações em geral. □

Se ao invés do colchete de campos à direita, for tomado o colchete de campos à direita, as fórmulas que relacionam as representações adjuntas Ad e ad são

1. $d\left(\mathrm{Ad}\right)_1(X) = -\mathrm{ad}_d(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.

2. $\mathrm{Ad}\left(\exp X\right) = \exp\left(-\mathrm{ad}_e(X)\right)$,

já que $[X, Y]_e = -[X, Y]_d$ e, portanto, $\mathrm{ad}_e(X) = -\mathrm{ad}_d(X)$, $X \in \mathfrak{g}$.

As fórmulas da proposição 3.21 relacionam as representações adjuntas do grupo e da álgebra de Lie, através da aplicação exponencial. A proposição a seguir segue o mesmo espírito, estabelecendo uma relação entre as conjugações e as adjuntas.

Como foi observado acima, cada $\mathrm{Ad}(g)$, $g \in G$, é um homomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Esses homomorfismos são de fato automorfismos pois $\mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$, $g \in G$. Portanto, é natural considerar Ad como um homomorfismo de grupos $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ denota o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$. A imagem de Ad é então um subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Posteriormente será demonstrado que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie e que Ad é diferenciável quando considerada como um homomorfismo a valores nesse grupo de Lie.

Já o núcleo $\ker \mathrm{Ad}$ é um subgrupo fechado de G, pois o Ad é uma aplicação diferenciável e, em particular, contínua, a valores no grupo $\mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$. Em geral, não é possível dizer nada sobre a natureza de $\ker \mathrm{Ad}$. Por exemplo, num grupo de Lie é discreto (isto é, $\dim G = 0$), $\ker \mathrm{Ad} = G$, isto é, não existe nenhuma restrição para os elementos de $\ker \mathrm{Ad}$. No entanto, se G é conexo as fórmulas desenvolvidas acima permitem caracterizar $\ker \mathrm{Ad}$.

Proposição 3.22 *Seja*

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G,\, gh = hg\}$$

o centro de G. Então, $Z(G) \subset \ker \mathrm{Ad}$. Suponha que o grupo de Lie G é conexo. Então $\ker \mathrm{Ad} = Z(G)$.

Demonstração: É consequência da fórmula

$$\exp(\mathrm{Ad}(g)X) = g(\exp X)g^{-1}$$

e do corolário 3.13. Em primeiro lugar, se $g \in Z(G)$ então

$$\exp(\mathrm{Ad}(g)X) = \exp X$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Mas, exp é um difeomorfismo ao redor da origem, isto é, existe uma vizinhança $V \subset \mathfrak{g}$ de 0 tal que exp é injetora nessa vizinhança. Portanto, $\mathrm{Ad}(g)X = X$ para todo $X \in V$. Isso ímplica que $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{id}$ pois para todo $Y \in \mathfrak{g}$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $rY \in V$ e como $\mathrm{Ad}(g)$ é linear, segue que $\mathrm{Ad}(g)Y = Y$. Portanto, $g \in \ker \mathrm{Ad}$, concluindo que $Z(G) \subset \ker \mathrm{Ad}$.

Por outro lado, suponha que G é conexo e seja $g \in \ker \mathrm{Ad}$. Então, $\mathrm{Ad}\,(g)\,X = X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e daí que

$$\exp\,(X) = g\,(\exp X)\,g^{-1}.$$

Isto significa que g comuta com todos os elementos da forma $\exp X$, $X \in \mathfrak{g}$. Portanto, g comuta com produtos de exponenciais $\exp\,(X_1) \cdots \exp\,(X_s)$. Como G é conexo todo elemento de G é um produto de exponenciais, concluindo que $\ker \mathrm{Ad} \subset Z\,(G)$. □

Esta proposição está em concordância com o fato de que o núcleo $\ker \mathrm{ad}$ da representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é o seu centro

$$\mathfrak{z}\,(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g},\ [X, Y] = 0\}.$$

Será mostrado posteriormente que o $Z\,(G)$ é um subgrupo de Lie de G, cuja subálgebra de Lie é o centro de $\mathfrak{g}$.

Exemplos:

1. Em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Ad}\,(g)$ coincide com a conjugação C_g, pois C_g se estende a uma transformação linear no espaço das matrizes, portando coincide com $\mathrm{Ad}\,(g)$ que é sua diferencial na identidade. Em outras palavras, se $X \in \mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R})$ e $g \in \mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$ então

   $$\mathrm{Ad}\,(g)\,X = gXg^{-1}.$$

   O centro de $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo das matrizes escalares $a \cdot 1$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Apesar de $\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})$ ter duas componentes conexas a expressão para $\mathrm{Ad}\,(g)$ confirma de imediato que $Z\,(\mathrm{Gl}\,(n, \mathbb{R})) = \ker \mathrm{Ad}$.

2. Num grupo abeliano G a representação adjunta é trivial: $\mathrm{Ad}\,(g) = \mathrm{id}$ para todo $g \in G$, pois $C_g = \mathrm{id}$.

□