Capítulo 2

Grupos topológicos

Diversas propriedades dos grupos de Lie dependem apenas de sua topologia e não da estrutura de variedade diferenciável. Essas propriedades valem para grupos topológicos gerais, conforme serão estudados neste capítulo.

2.1 Introdução

Um *grupo topológico* é um grupo cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com o produto no grupo, no sentido em que

1. o produto (ou multiplicação) $G \times G \to G$ é uma aplicação contínua, quando se considera $G \times G$ com a topologia produto e
2. a inversão $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$, é contínua.

De forma alternativa, G é um grupo topológico se a aplicação $\widehat{p} : G \times G \to G$, definida por $\widehat{p}(g,h) \to gh^{-1}$ é contínua. De fato, $\widehat{p}$ é contínua se p e ι são contínuas e se $\widehat{p}$ é contínua então $g \to (1,g) \to g^{-1}$ é contínua e, portanto, $p(g,h) = \widehat{p}(g,h^{-1})$ é contínua.

Para cada $g \in G$, define-se as seguintes aplicações:

- translação à esquerda $E_g : G \to G$, $E_g(h) = gh$,
- translação à direita $D_g : G \to G$, $D_g(h) = hg$ e

- conjugação (ou automorfismo interno) $C_g : G \to G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Essas aplicações são contínuas pois $E_g = p \circ s_{g,1}$ e $D_g = p \circ s_{g,2}$ onde $s_{g,1}(h) = (g,h)$ e $s_{g,2}(h) = (h,g)$ são aplicações contínuas $G \to G \times G$. Além do mais, $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$. Segue das definições que $E_g \circ E_{g^{-1}} = D_g \circ D_{g^{-1}} = \mathrm{id}$. Estas igualdades mostram que ambas as translações E_g, D_g e C_g são homeomorfismos com $(E_g)^{-1} = E_{g^{-1}}$, $(D_g)^{-1} = D_{g^{-1}}$ e $(C_g)^{-1} = C_{g^{-1}}$.

Exemplos:

1. Subgrupos de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$: $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n)$ $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{H})$;

2. $(\mathbb{R}^n, +)$;

3. Grupo qualquer com topologia caótica (todos os conjuntos são abertos).

4. Corpo ordenado qualquer com a topologia da ordem (os intervalos abertos geram a topologia).

5. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ com a seguinte a topologia gerada pela seguinte base formada pelos intervalos abertos das retas verticais $r_a = \{a + ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$. Esse grupo não é topológico em relação a essa topologia. De fato, a translação à esquerda $E_{e^{i\theta}}$ é uma rotação de ângulo $\theta \in \mathbb{R}$. A imagem do aberto $r_a = \{a + ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$ não é aberto se por exemplo $\theta = -\pi/2$.

6. $\mathbb{S}^1$ visto como $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ou como $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

7. Mais geral que o exemplo anterior: cilindros $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+k}/\mathbb{Z}^k$.

8. Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Denote por $\mathcal{A}(X,G)$ o conjunto das aplicações contínuas $f : X \to G$. Este conjunto tem uma estrutura de grupo com o produto $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$. Introduza em $\mathcal{A}(X,G)$ a topologia compacto-aberto, que tem como base de abertos os conjuntos do tipo

$$A_{K,U} = \{f \in \mathcal{A}(X,G) : f(K) \subset U\}$$

onde $K \subset X$ é compacto e $U \subset G$ é aberto. Com essas estruturas $\mathcal{A}(X, G)$ é um grupo topológico. De fato, o produto em $\mathcal{A}(X, G) \times \mathcal{A}(X, G)$ é homeomorfo a $\mathcal{A}(X, G \times G)$ por $(f, g) \mapsto h$ onde $h(x) = (f(x), g(x))$, com a topologia compacto-aberta em $\mathcal{A}(X, G \times G)$. Seja $\widehat{p}_{\mathcal{A}}(f, g) = fg^{-1}$. Através da identificação entre esses espaços, $\widehat{p}_{\mathcal{A}}^{-1}(A_{K,U})$ é o conjunto das funções $h : X \to G \times G$ tais que $h(K) \subset \widehat{p}^{-1}(U)$. Isto é,

$$\widehat{p}_{\mathcal{A}}^{-1}(A_{K,U}) = A_{K, \widehat{p}^{-1}(U)}$$

onde a vizinhança do segundo membro é vista em $\mathcal{A}(X, G \times G)$. Portanto, o grupo é topológico.

9. Seja $\{G_i\}_{i \in I}$ uma família de grupos indexada pelo conjunto I. O produto cartesiano $G = \prod_{i \in I} G_i$ é o conjunto formado pelas aplicações $f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ tais que $f(i) \in G_i$ para todo $i \in I$. O produto cartesiano admite uma estrutura de grupo em que o produto é dado componente a componente: $(fg)(i) = f(i)\, g(i)$. A topologia produto em $\prod_{i \in I} G_i$ é gerada por abertos do tipo $\prod_{i \in I} A_i$ com $A_i \subset G_i$ abertos, $i \in I$ e $A_i = G_i$ a menos de um número finito de índices. Como o produto é feito componente a componente e cada G_i é um grupo topológico, G é grupo topológico com a topologia produto.

Em particular, se I é um conjunto finito, $\prod_{i \in I} G_i = G_1 \times \cdots \times G_n$, seus elementos são n-uplas $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $g_i \in G_i$, a multiplicação é dada por

$$gh = (g_1 h_1, \ldots, g_n h_n)$$

e a topologia é gerada por subconjuntos do tipo $A_1 \times \cdots \times A_n$ com $A_i \subset G_i$ aberto. $\square$

Se A é um subconjunto de G e $g \in G$ a translação $E_g(A)$ é denotada simplesmente por $gA = \{gx : x \in A\}$. O fato de que as translações são homeomorfismos implica que gA é aberto ou fechado se A é aberto ou fechado, respectivamente. A mesma observação vale para as translações à direita Ag. De forma mais geral, seja $B \subset G$ e escreva

$$A \cdot B = AB = \{xy \in G : x \in A, y \in B\}.$$

Por definição $AB = \bigcup_{x \in B} Ax = \bigcup_{x \in A} xB$. Dessa forma, se A (ou B) é aberto, então AB é aberto por ser união de abertos. Deve-se observar, no entanto, que AB pode não ser fechado, mesmo que ambos os conjuntos sejam fechados.

Juntamente com a notação AB, surgem naturalmente as notações $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$, etc.

Para $A \subset G$ é usada a notação $A^{-1} = \{x^{-1} \in G : x \in A\}$. Como a inversão ι é um homeomorfismos, $A^{-1} = \iota(A)$ é aberto ou fechado se, e só se, A é aberto ou fechado, respectivamente.

Uma vizinhança U da identidade é dita *simétrica* se $U = U^{-1}$. Não é difícil construir vizinhanças simétricas. De fato, se V é uma vizinhança qualquer de 1 então V^{-1} também é uma vizinhança e $V \cap V^{-1}$ é uma vizinhança simétrica.

2.2 Vizinhanças do elemento neutro

Seja $A \subset G$ um aberto não vazio e tome $g \in A$. Então, $g^{-1}A$ e Ag^{-1} são vizinhanças do elemento neutro de G. Reciprocamente, se B é uma vizinhança de 1 e $g \in G$ então gB e Bg são vizinhanças de g. Essas observações têm como consequência que toda informação sobre a topologia de G está concentrada no conjunto das vizinhanças abertas do elemento neutro. O conjunto dessas vizinhanças é denotado por $\mathcal{V}(1)$ ou simplesmente $\mathcal{V}$. A proposição a seguir lista algumas propriedades de $\mathcal{V}$, que serão usadas posteriormente descrever a topologia.

Proposição 2.1 *Seja G um grupo topológico e denote por $\mathcal{V}$ o conjunto das vizinhanças abertas do elemento neutro 1. Então, valem as seguintes propriedades:*

T1) *O elemento neutro 1 pertence a todos os subconjuntos $U \in \mathcal{V}$.*

T2) *Dados dois conjuntos U, V em $\mathcal{V}$, $U \cap V$ está em $\mathcal{V}$.*

GT1) *Para todo $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$*

GT2) *Dado $U \in \mathcal{V}$, $U^{-1} \in \mathcal{V}$.*

GT3) *Para todo $g \in G$ e $U \in \mathcal{V}$, $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$.*

Demonstração: As propriedades (T1) e (T2) valem para as vizinhanças de um ponto num espaço topológico qualquer. A propriedade (GT1) é equivalente ao produto ser contínuo em 1. De fato, $p^{-1}(U) \subset G \times G$ é um aberto contendo $(1,1)$. Portanto existe um aberto V de G, com $(1,1) \in V \times V \subset p^{-1}(U)$. Isso significa que $V^2 = p(V \times V) \subset U$. Já a propriedade (GT2) foi comentada acima e é equivalente à continuidade da inversão ι em 1. Por fim (GT3) segue de que $g1g^{-1} = 1$ e $C_g(x) = gxg^{-1}$ é contínua. □

As propriedades enunciadas nesta proposição caracterizam completamente o conjunto das vizinhanças da identidade.

Definição 2.2 *Um sistema de vizinhanças da identidade (ou elemento neutro) em um grupo G é uma família de conjuntos $\mathcal{V}$ satisfazendo as propriedades da proposição anterior.*

Será mostrado abaixo que um sistema de vizinhanças da identidade define de forma única a topologia de um grupo topológico. Para isso será necessário um lema que garante a continuidade das aplicações conhecendo a continuidade em um ponto. Seja G um grupo. Uma topologia $\mathcal{T}$ em G é dita *invariante à esquerda* se gA é aberto de $\mathcal{T}$ para todo $g \in G$ e $A \in \mathcal{T}$. Uma topologia é invariante à esquerda se, e só se, as translações à esquerda são contínuas (e, portanto, homeomorfismos). Da mesma forma se definem as topologias *invariantes à direita*. Se $\mathcal{T}$ é uma topologia invariante à esquerda em G então a topologia produto em $G \times G$ é invariante à esquerda pois $(g,h) A \times B = (gA) \times (hB)$ se $A, B \subset G$ e $(g,h) \in G \times G$. Da mesma forma, a topologia produto é invariante à direita em $G \times G$ se for invariante à direita em G.

Lema 2.3 *Seja G é munido de uma topologia $\mathcal{T}$ invariante à esquerda e à direita. Então, G é um grupo topológico se, e somente se,*

1. *p é contínua em $(1,1)$ e*

2. *$\iota : G \to G$ é contínua em 1.*

Demonstração: É claro que as condições são necessárias. A suficiência segue das seguintes igualdades, cujas demonstrações são imediatas.

1. Dado $(g,h) \in G \times G$ sejam $E_{(g,h)}$ e $D_{(g,h)}$ a translação à esquerda e à direita em $G \times G$, respectivamente. Então $p \circ E_{(g,1)} = E_g \circ p$ e $p \circ D_{(1,g)} = D_g \circ p$.

2. Dado $g \in G$, $\iota \circ E_g = D_{g^{-1}} \circ \iota$.

Agora, tome $(g,h) \in G \times G$. Então $p \circ E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)} = E_g \circ D_h \circ p$. O segundo membro dessa igualdade é uma aplicação contínua em $(1,1)$ pois $E_g \circ D_h$ é homeomorfismo. Portanto, $p \circ E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}$ é contínua em $(1,1)$. Mas $E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}$ é um homeomorfismo, daí que p é contínua em $(g,h) = E_{(g,1)} \circ D_{(1,h)}(1,1)$.

Por outro lado, $D_{g^{-1}} \circ \iota$ é contínua em 1, portanto, $\iota \circ E_g$ é contínua em 1 e daí que ι é contínua em $g = E_g(1)$. □

Para caracterizar a topologia de G a partir dos sistemas de vizinhanças da identidade será usado o seguinte conceito:

Definição 2.4 *Um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto x num espaço topológico X é uma família $\mathcal{F}$ de abertos de X tal que cada elemento de $\mathcal{F}$ contém x e se $A \subset X$ é um aberto com $x \in A$ então existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset A$.*

Proposição 2.5 *Seja G um grupo e suponha que $\mathcal{V}$ é um sistema de vizinhanças da identidade em G. Então, existe uma única topologia $\mathcal{T}$ que torna G um grupo topológico de tal forma que $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro em relação a $\mathcal{T}$.*

Demonstração: Defina $\mathcal{T}$ como sendo a família dos subconjuntos $A \subset G$ tais que para todo $g \in A$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $gU \subset A$. É claro que os conjuntos $\emptyset$ e G são elementos de $\mathcal{T}$. Para ver que $\mathcal{T}$ é uma topologia tome $A, B \in \mathcal{T}$ e $x \in A \cap B$. Então, existem $U, V \in \mathcal{V}$ tais que $xU \subset A$ e $xV \subset B$. Pela propriedade (T2), $U \cap V \in \mathcal{V}$. Mas,

$$x(U \cap V) = xU \cap xV \subset A \cap B,$$

mostrando que $A \cap B \in \mathcal{T}$. A definição de $\mathcal{T}$ mostra que uma união qualquer de conjuntos em $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$.

Agora as vizinhanças abertas de 1 em relação a $\mathcal{T}$ são os elementos de $\mathcal{V}$. De fato, a própria definição de $\mathcal{T}$ mostra que os elementos de $\mathcal{V}$

são vizinhanças de 1. Por outro lado, seja U uma vizinhança de 1 em relação a $\mathcal{T}$. Então, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $1 \cdot V \subset U$. Portanto, $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em relação a $\mathcal{T}$.

A definição de $\mathcal{T}$ e a propriedade (GT3) garantem que $\mathcal{T}$ é invariante à direita e à esquerda. De fato, uma translação à esquerda gU, $u \in \mathcal{V}$, é também uma translação à direita da forma $gU = (gUg^{-1})\,g$. Por (GT3) se $U \in \mathcal{V}$ então $gUg^{-1} \in \mathcal{V}$. Portanto, o lema anterior garante que G munido de $\mathcal{T}$ é grupo topológico, tão logo se verifique que p e ι são contínuas em $(1,1)$ e 1, respectivamente. Mas essas continuidades são equivalentes às propriedades (GT1) e (GT2), respectivamente, concluindo a demonstração de que G é grupo topológico com a topologia $\mathcal{T}$.

Por fim, suponha que $\mathcal{T}'$ é outra topologia satisfazendo as mesmas condições. Então, $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 1 em relação a $\mathcal{T}'$. Realizando translações à esquerda, vê-se que gV, com V variando em $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $g \in G$. Portanto, para todo $A \in \mathcal{T}'$ e $g \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $gV \subset A$. Daí que todo aberto de $\mathcal{T}'$ é aberto de $\mathcal{T}$, isto é, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Alterando o papéis de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, segue que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, concluindo a demonstração. □

Exemplo: Uma situação ilustrativa da construção feita acima é quando os elementos de $\mathcal{V}$ são subgrupos de G. Nesse caso, as condições para $\mathcal{V}$ se reduzem a (T2) e (GT3) pois se V é um subgrupo então $1 \in V$ e $V^2 = V^{-1} = V$. Um exemplo de um sistema $\mathcal{V}$ desse tipo é construido no grupo $\mathbb{Z}$. Dado um número primo $p > 0$ seja $\mathcal{V}_p$ a família de subgrupos $V_n = p^n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Como $\mathbb{Z}$ é abeliano, a condição (GT3) é automaticamente satisfeita. Já a condição (T2) vale pois $p^n\mathbb{Z} \cap p^m\mathbb{Z} = p^{\max\{n,m\}}\mathbb{Z}$. Portanto, $\mathcal{V}$ define uma topologia em $\mathbb{Z}$ tornando-o um grupo topológico. Essa é a chamada topologia p-ádica em $\mathbb{Z}$. □

A descrição feita da topologia em termos das vizinhanças da identidade estabelece o princípio de que toda descrição topológica em G de ver feita através dessas vizinhanças. A proposição abaixo segue esse principio ao dar um critério para que a topologia seja de Hausdorff em termos das vizinhanças da identidade.

Proposição 2.6 *Seja G um grupo topológico. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A topologia de G é Hausdorff.*
2. *$\{1\}$ é um conjunto fechado.*
3. *$\bigcap_{U \in \mathcal{V}(1)} U = \{1\}$.*

Demonstração: Numa topologia Hausdorff todo conjunto unitário é fechado, em particular $\{1\}$ é fechado. Suponha que $\{1\}$ seja fechado. Para mostrar que a interseção das vizinhanças se reduz ao elemento neutro deve-se mostrar que para todo $x \neq 1$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin U$. Como $\{1\}$ é fechado, existe tal $V \in \mathcal{V}$ tal que $1 \notin x^{-1}V$, isto é, $x \notin V$. Por fim, assuma que a interseção se reduz a $\{1\}$ e tome $x \neq 1$. Então existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin U$. Por (GT1) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$. Então, $V \cap xV^{-1} = \emptyset$, pois $z \in V \cap xV^{-1}$ deve satisfazer $z = u = xv^{-1}$, $u, v \in V$, e daí que $x = uv \in V^2 \subset U$, contradizendo a escolha de U. Consequentemente, os abertos V e xV^{-1} separam 1 de x. Tome agora $y \neq z$ arbitrários. Então, existem abertos $y^{-1}z \in U_1$ e $1 \in U_2$ com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Portanto, os abertos yU_1 e yU_2 separam z de y. □

Seguindo ainda o princípio de que a topologia de G é descrita pelas vizinhanças da identidade e as translações, a proposição a seguir diz respeito à continuidade de homomorfismos.

Proposição 2.7 *Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $\theta : G_1 \to G_2$ um homomorfismo. Então, θ é contínuo se, e somente se, θ for contínuo em $1 \in G_1$.*

Demonstração: Basta mostrar que a continuidade em 1 acarreta a continuidade em todos os pontos. Como θ é homomorfismo, $\theta \circ E_g = E_{\theta(g)} \circ \theta$ para todo $g \in G$. O segundo membro é contínuo em 1. Portanto, $\theta \circ E_g$ é contínuo em 1 e como E_g é homeomorfismo, segue que θ é contínuo em $g = E_g(1)$. □

2.3 Grupos Metrizáveis

Uma distância $d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ num grupo G é dita invariante à esquerda se $d(gx, gy) = d(x, y)$ para todo $g, x, y \in G$. Em outras palavras, d é invariante à esquerda caso as translações à esquerda E_g são isometrias. As distâncias invariantes à direita são definidas de maneira análoga. Uma distância é bi-invariante se ela é ao mesmo tempo invariante à esquerda e à direita.

Uma condição necessária para que um espaço topológico seja metrizável é que todo ponto admita um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. No caso de grupos topológicos essa condição também é suficiente.

Teorema 2.8 *Seja G um grupo topológico e suponha que exista um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Então, existem d_E e d_D distâncias invariantes à direita e à esquerda, respectivamente, que são compatíveis com a topologia de G.*

Este teorema não será demonstrada aqui. No caso em que G é um grupo de Lie a condição de enumerabilidade é satisfeita pois localmente G é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Portanto, grupos de Lie são metrizáveis. No entanto, para grupos de Lie em particular existe uma demonstração mais simples que a demonstração geral do teorema 2.8, utilizando métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis. Essa demonstração será apresentada posteriormente.

Em todo caso, vale a pena ressaltar que o teorema garante a existência tanto de uma distância invariante à direita quanto de uma invariante à esquerda. Porém, pode não existir uma distância bi-invariante num grupo metrizável.

Exemplos: Alguns exemplos de distâncias invariantes são:

1. Seja $|\cdot|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ de $d(x, y) = |x - y|$. Então d é uma distância bi-invariante em $(\mathbb{R}^n, +)$.

   Observe que uma distância definida por uma norma no espaço de matrizes $n \times n$ não é necessariamente invariante quando restrita ao grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

2. Seja G um grupo compacto metrizável por uma distância d'. Defina
$$d(g,h) = \sup_{x \in G} d'(gx, gy).$$
Então d é uma distância invariante à esquerda em G, compatível com sua topologia. A distância d pode ser vista também da seguinte maneira: denote por $\mathrm{Hom}(G)$ o grupo dos homeomorfismos de G e seja $\rho : G \to \mathrm{Hom}(G)$ a aplicação $\rho(g) = E_g$. Então d é a restrição a $\rho(G)$ da distância em $\mathrm{Hom}(G)$ que define a convergência uniforme em relação a d'.

□

2.4 Subgrupos

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. A topologia de G induz uma topologia em H, cujos abertos são da forma $A \cap H$ com A aberto em G. Com essa topologia, H é um grupo topológico. De fato, denote por $p_H : H \times H \to H$ o produto em H, que é a restrição a H do produto p de G. Para todo subconjunto $A \subset G$ vale $p_H^{-1}(A \cap H) = p^{-1}(A) \cap (H \times H)$. Em particular, se A é aberto, $p_H^{-1}(A \cap H)$ é um aberto da topologia induzida em $H \times H$ pela topologia produto em $G \times G$. No entanto, essa topologia induzida coincide com a topologia produto de H. Daí que p_H é contínua. Da mesma forma se mostra que $\iota_H(h) = h^{-1}$ é contínua em H.

A seguir serão apresentados alguns resultados envolvendo propriedades topológicas dos subgrupos de G. Em algumas demonstrações o seguinte lema é utilizado.

Lema 2.9 *Seja X um espaço topológico e $\phi : X \to X$ um homeomorfismo. Suponha que $A \subset X$ é um subconjunto invariante por ϕ, isto é, $\phi(A) \subset A$. Então* $\mathrm{fe}A$, $\mathrm{int}A$ *e* $\mathrm{fr}A$ *também são invariantes. Além do mais, se $\phi(A) \subset \mathrm{fe}A$ então $\phi(\mathrm{fe}A) \subset \mathrm{fe}A$.*

Demonstração: Tome $x \in \mathrm{fe}A$ e U uma vizinhança de $\phi(x)$. Então $\phi^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x. Portanto, existe $y \in A \cap \phi^{-1}(U)$ e como A é invariante, e $\phi(y) \in A \cap U$, mostrando que $\mathrm{fe}A$ é invariante.

Seja $x \in \text{int}A$ e tome um aberto U com $x \in U \subset A$. Então $\phi(x) \in \phi(U) \subset A$, pois A é invariante. Como ϕ é homeomorfismo, $\phi(U)$ é aberto, e, portanto $\phi(x) \in \text{int}A$.

Como A é invariante, o seu complementar em X também é invariante. Daí que a $\text{fr}A$ é invariante.

Suponha que $\phi(A) \subset \text{fe}A$. Como ϕ é homeomorfismo, $\text{fe}\phi(A) = \phi(\text{fe}A)$. Portanto, $\phi(\text{fe}A) \subset \text{fe}(\text{fe}A) = \text{fe}A$. □

Proposição 2.10 *Seja $H \subset G$ um subgrupo. Então seu fecho* fe$H$ *também é subgrupo. Além do mais, se H é normal o mesmo ocorre com* fe$H$.

Demonstração: Deve-se mostrar que $xy \in \text{fe}H$ se $x, y \in \text{fe}H$. Para isso suponha em primeiro lugar que $x \in H$. Então, E_x deixa H invariante e lema acima garante que $E_x(\text{fe}H) \subset \text{fe}H$. Mas, isso significa que se $y \in \text{fe}H$ então $xy \in \text{fe}H$. Portanto, dados $x \in H$ e $y \in \text{fe}H$, $xy \in \text{fe}H$. Esta frase pode ser interpretada dizendo que $D_y(H) \subset \text{fe}H$ para todo $y \in \text{fe}H$. Mas, D_y é homeomorfismo, portanto $D_y(\text{fe}H) \subset \text{fe}H$, para todo $y \in \text{fe}H$, o que significa que $xy \in \text{fe}H$ se $x, y \in \text{fe}H$.

Por um argumento semelhante, a inversão ι deixa invariante fe$H$, mostrando que fe$H$ é subgrupo.

Por fim, dizer que H é normal é o mesmo que dizer que H é invariante pelas conjugações C_g, $g \in G$. Pelo lema 2.9 segue que fe$H$ também é invariante por C_g, isto é, fe$H$ é normal. □

Os subgrupos fechados desempenham um papel central no estudo das ações dos grupos topológicos (e de Lie), pois no caso de ações contínuas, os subgrupos que fixam um ponto (subgrupos de isotropia) são fechados. A proposição acima mostra a existência de uma grande quantidade de subgrupos fechados. Por outro lado, se um subgrupo H é aberto então ele é necessariamente fechado:

Proposição 2.11 *Suponha que H é um subgrupo aberto de G. Então, H é fechado.*

Demonstração: Uma classe lateral gH de H é obtida de H por uma translação à esquerda. Portanto, se H é aberto, o mesmo ocorre com gH. Mas o grupo G é a união de H com as classes laterais gH, $g \notin H$. Isso significa que o complementar de H em G é uma união de abertos, e daí que H é fechado. $\square$

Devido a invariança da topologia de G por translações à esquerda e à direita, qualquer subgrupo de interior não vazio é aberto (e, portanto, fechado). De fato, tome $x \in \mathrm{int} H$ e um aberto $V \in \mathcal{V}$ tal que $xV \subset H$. Então $V = x^{-1}(xV) \subset H$ pois H é subgrupo. Daí que se $y \in H$ então $y \in yV \subset H$, mostrando que todo ponto de H é interior, isto é, H é aberto.

Um subconjunto A de um espaço topológico X que é ao mesmo tempo aberto e fechado é união de componentes conexas de X, isto é, se uma componente conexa $C \subset X$ satisfaz $C \cap A \neq \emptyset$ então $C \subset A$. Esta observação juntamente com a proposição 2.11 mostra que os subgrupos abertos de G são uniões de componentes conexas de G. Em particular, se o grupo é conexo ele é o único de seus subgrupos abertos.

Em todo caso, as componentes conexas de G estão relacionadas com os grupos abertos. Essas componentes são descritas a seguir a partir da componente conexa G_0 que contém a identidade $1 \in G$. Essa componente conexa é denominada *componente da identidade* (ou do elemento neutro).

Proposição 2.12 *Denote por G_0 a componente conexa do elemento neutro. Então G_0 é um subgrupo fechado e normal de G. Uma outra componente conexa qualquer é uma classe lateral $gG_0 = G_0 g$ de G_0.*

Demonstração: Uma translação à esquerda E_g, $g \in G$, é um homeomorfismo, portanto E_g leva componentes conexas de G em componentes conexas. Em particular, se $g \in G_0$, então $E_g(G_0)$ está contido em uma componente conexa de G. Porém, $1 \in G_0$ e $E_g(1) = g \in G_0$. Isso implica que $E_g(G_0) \subset G_0$. Tomando, então $g, h \in G_0$, vê-se que $gh \in G_0$. Analogamente, $\iota(G_0)$ deve estar contido em uma componente conexa de G que só pode ser G_0 pois $\iota(1) = 1$. Isso mostra que G_0 é subgrupo. Para ver que é normal, basta repetir o mesmo argumento com as conjugações C_g, $g \in G$, levando em conta que $C_g(1) = 1$. Por fim, por ser componente conexa, G_0 é fechado.

Como G_0 é normal, $gG_0 = G_0 g$ para todo $g \in G$. É claro que $gG_0 = E_g(G_0)$ é conexo e, portanto, $gG_0 \subset C$ onde C é uma componente conexa G. Suponha por absurdo que $gG_0 \neq C$. Então, $G_0 = E_{g^{-1}}(gG_0) \neq g^{-1}C$ e $G_0 \subset C$, contradizendo o fato de que G_0 é componente conexa, já que $g^{-1}C$ é conexo. □

Em geral a componente da identidade não é um subgrupo aberto. Uma condição para que isso aconteça é que o grupo seja localmente conexo, no sentido em que todo ponto tem uma vizinhança aberta conexa. Os grupos de Lie por serem localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ são localmente conexos, assim a proposição a seguir assegura que as componentes conexas desses grupos são abertas.

Proposição 2.13 *Suponha que G é localmente conexo. Então, G_0 é um subgrupo aberto.*

Demonstração: Como G é localmente conexo, existe uma vizinhança conexa U do elemento neutro. É claro que $U \subset G_0$. Portanto, G_0 tem interior não vazio, e daí que é aberto. □

Por fim, será mostrado o seguinte resultado sobre a forma de gerar grupos, que é bastante útil no estudo dos grupos de Lie.

Proposição 2.14 *Suponha G conexo e tome uma vizinhança U do elemento neutro. Então, $G = \bigcup_{n\geq 1} U^n$.*

Demonstração: Seja $V = U \cap U^{-1}$ uma vizinhança simétrica contida em U. Como $\bigcup_{n\geq 1} V^n \subset \bigcup_{n\geq 1} U^n$ basta mostrar que $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n$. A união $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é fechada por produtos. Além do mais, como V é simétrico, $(V^n)^{-1} = V^n$. Isso implica que $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é um subgrupo de G, que tem interior não vazio pois $V \subset \bigcup_{n\geq 1} V^n$. Portanto, $\bigcup_{n\geq 1} V^n$ é um subgrupo aberto. Como G é conexo, $G = \bigcup_{n\geq 1} V^n$. □

2.5 Ações grupos e espaços quocientes

2.5.1 Descrição algébrica

Uma *ação à esquerda* de um grupo G num conjunto X é uma função que associa a $g \in G$ uma aplicação $a(g) : X \to X$ e que satisfaz as propriedades:

1. $a(g) = \mathrm{id}_X$, isto é, $a(g)(x) = x$, para todo $x \in X$ e
2. $a(gh) = a(g) \circ a(h)$.

Essas propriedades garantem que cada $a(g)$ é uma bijeção, já que

$$a\left(g^{-1}\right) a(g) = a(1) = a(g)\, a\left(g^{-1}\right) = \mathrm{id}_X.$$

Visto de outra maneira, uma ação à esquerda é um homomorfismo $a : G \to \mathcal{B}(X)$, onde $\mathcal{B}(X)$ é o grupo das bijeções de X, com o produto dado pela composta de duas aplicações.

Uma *ação à direita* é definida de maneira análoga substituindo a segunda propriedade por $a(gh) = a(h) \circ a(g)$.

De forma alternativa, uma ação à esquerda é definida como sendo uma aplicação $\phi : G \times X \to X$ satisfazendo $\phi(1, x) = x$ e $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, $g, h \in G$ e $x \in X$. A relação entre ϕ e a é a óbvia: $\phi(g, x) = a(g)(x)$, isto é, $a(g)$ é a aplicação parcial ϕ_g de ϕ quando a primeira coordenada é fixada: $\phi_g(x) = \phi(g, x)$.

A outra aplicação parcial associada a ϕ é obtida fixando $x \in X$: $\phi_x : G \to X$, $\phi_x(g) = \phi(g, x) = a(g)(x)$.

Normalmente, os símbolos a ou ϕ são suprimidos na notação para ações de grupos. Assim uma ação à esquerda escreve-se apenas $g(x)$, $g \cdot x$ ou gx ao invés de $a(g)(x)$. Para ações à direita é mais conveniente escrever o valor de $a(g)$ em x como $(x)\, a(g)$ aparecendo então a notações $(x)\, g$, $x \cdot g$ ou xg. Com essas notações uma ação à esquerda satisfaz $1x = x$ e $g(hx) = (gh)\, x$, já uma ação à direita satisfaz $x1 = x$ e $(xg)\, h = x(gh)$.

Se a é uma ação à esquerda de G em X então a aplicação a' definida por $a'(g) = a(g^{-1})$ é uma ação à direita e vice-versa. No que segue serão tratadas apenas a ações à esquerda. As propriedades enunciadas são automaticamente transferidas para as ações à direita substituindo $a(g)$ por $a(g^{-1})$.

Dado $x \in X$, sua *órbita* por G denotada por $G \cdot x$ ou Gx é definida como sendo o conjunto

$$Gx = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Mais geralmente, se $A \subset G$ então $Ax = \{gx : g \in A\}$. Em outras palavras, $Ax = \phi_x(A)$. Cada órbita é uma classe de equivalência da seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

O conjunto H_x dos elementos de G que fixam x é denominado de *subgrupo de isotropia* ou *estabilizador* de x:

$$H_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

O subgrupo de isotropia é de fato um subgrupo de G, pois $(gh)x = g(hx)$, portanto gh fixa x se $gx = hx = x$. Além do mais, $g^{-1}x = x$ se $gx = x$, pois $a(g^{-1}) = a(g)^{-1}$.

Os subgrupos de isotropia são obtidos um dos outros pela seguinte relação:

Proposição 2.15 *Dados $x, y \in X$, suponha que $y = gx$ com $g \in G$. Então, $H_y = gH_xg^{-1}$, onde H_x e H_y denotam os subgrupos de isotropia.*

Demonstração: Por definição $h \in H_y$ se, e só se, $h(gx) = gx$. Aplicando g^{-1} a esta igualdade segue que $(g^{-1}hg)x = x$, isto é, $g^{-1}hg \in H_x$. Portanto, $h \in H_y$ se, e só se, $h \in gH_xg^{-1}$. □

As ações de um grupo G são distinguidas em classes de acôrdo com as propriedades de suas órbitas e grupos de isotropia.

Definição 2.16 *Tome uma ação a de G em X.*

1. *A ação é dita* efetiva *se $\{g \in G : a(g) = \mathrm{id}_X\} = \{1\}$.*

2. *A ação é dita* livre *se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G, isto é, se $gx = x$ para algum $x \in X$, então $g = 1$.*

3. *A ação é dita* transitiva *X é uma órbita de G, isto é, para todo par de elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.*

A definição deixa claro que ações livres são efetivas, no entanto nem toda ação efetiva é livre. Em termos do homomorfismo $a : G \to \mathcal{B}(X)$, uma ação é efetiva se, e só se, $\ker a = \{1\}$, isto é, se a é injetora. Portanto, numa ação efetiva, G é isomorfo à sua imagem $a(G)$ por a. Por essa razão, uma ação efetiva é também denominada de *ação fiel.*

No caso de uma ação transitiva o conjunto X se identifica com um espaço quociente de G, através da seguinte construção. Dado um subgrupo $H \subset G$ denote por G/H o conjunto das classes laterais gH, $g \in G$. Uma classe lateral gH é denotada também por $\pi(g)$ indicando uma aplicação sobrejetora (projeção) $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$, sobrejetora. Existe uma ação à esquerda natural do grupo G em G/H, que é dada por $g(g_1H) = (gg_1)H$ ou $g\pi(g_1) = \pi(gg_1)$.

Proposição 2.17 *Suponha que a ação de G em X é transitiva e tome $x \in X$. Então, aplicação $\xi_x : gH_x \in G/H_x \mapsto gx \in X$ é uma bijeção entre G/H_x e X. A aplicação ξ_x* equivariante *no sentido em que $g\xi_x(g_1H) = \xi_x((gg_1)H)$, $g, g_1 \in G$, isto é, ξ_x comuta com as ações de G em G/H e X. Além do mais, se $y = gx$ então $\xi_y = \xi_x \circ D_g$.*

Demonstração: Em primeiro lugar, a aplicação é bem definida pois se g_1 e g_2 estão na mesma classe lateral, isto é, $g_1H_x = g_2H_x$ então $g_2^{-1}g_1 \in H_x$, o que significa que $g_2^{-1}g_1x = x$, isto é, $g_1x = g_2x$. Por definição a aplicação é sobrejetora se, e só se, a ação é transitiva. Agora, suponha que $g_1x = g_2x$. Então $g_2^{-1}g_1x = x$, isto é, $g_2^{-1}g_1 \in H_x$ e daí que $g_1H_x = g_2H_x$, mostrando a injetividade da aplicação.

Seja $y = \xi(g_1H)$. Então $y = g_1x$, e, portanto, $gy = g(g_1x) = (gg_1)x$. Daí que $g\xi(g_1H) = \xi((gg_1)H)$.

Por fim, se $y = gx$ então $\xi_y(h) = h(gx) = (hg)x = \xi_x(hg)$, mostrando que $\xi_y = \xi_x \circ D_g$. □

A aplicação ξ_x da proposição acima está relacionada com a aplicação parcial ϕ_x através do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_x} & X \\ \downarrow \pi & \nearrow_{\xi_x} & \\ G/H & & \end{array}$$

Em virtude dessa identificação, um quociente G/H é também chamado de *espaço homogêneo*, como são chamados normalmente os conjuntos aonde os grupos agem transitivamente. O ponto x escolhido para estabelecer a identificação entre X e G/H_x é denominado de *origem* ou *base* do espaço homogêneo X. A identificação de X com G/H_x depende da escolha da origem. No entanto, alterando x não muda substancialmente o espaço quociente, pois numa ação transitiva os subgrupos de isotropia são conjugados entre si, como mostra a proposição 2.15.

Essa discussão se estende de forma análoga a ações à direita, onde os espaços homogêneos são os quocientes $H \setminus G$, formados pelas classes laterais Hg, $g \in G$.

Num espaço homogêneo G/H, isto é, na presença de uma ação transitiva, as ações livres são aquelas em que o subgrupo de isotropia H se reduz a $\{1\}$. Nesse caso, o espaço homogêneo se identifica a G. Já as ações transitivas e efetivas são descritas a seguir pelos subgrupos normais contidos na isotropia.

Proposição 2.18 *Seja G uma ação transitiva em $X = G/H$. Então, a ação é efetiva se, e somente se, H não contém subgrupos normais de G, além de $\{1\}$.*

Demonstração: Suponha que $N \subset H$ é um subgrupo normal de G, isto é, $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. É claro que H é o grupo de isotropia da origem. Mas, pela proposição 2.15, os subgrupos de isotropia são conjugados entre si. Portanto, qualquer $h \in N$ está contido em todos os subgrupos de isotropia. Mas isso significa que $hy = y$, para todo $y \in X$, isto é, $h = \mathrm{id}_X$. Portanto, se a ação é efetiva, $N = \{1\}$.

Reciprocamente, o subgrupo normal $\ker a = \{g \in G : \forall y \in X, gy = y\}$ está contido em H. Portanto, se H não contém subgrupos normais além do trivial, $\ker a = \{1\}$ e a ação é efetiva. □

2.5.2 Ações contínuas

No contexto topológico é natural considerar ações contínuas no seguinte sentido.

Definição 2.19 *Seja G um grupo topológico e X um espaço topológico. Uma ação de G em X é contínua se a aplicação $\phi : G \times X \to X$ definida por $\phi(g, x) = gx$ é contínua.*

Se $H \subset G$ é um subgrupo, a restrição da ação de G em X é uma ação de H. Tomando em H a topologia induzida, a restrição de uma ação contínua é contínua.

No caso de uma ação contínua, os objetos introduzidos anteriormente admitem boas propriedades topológicas.

Em primeiro lugar, considere as aplicações $g : X \to X$ (ou melhor $a(g)$). Para $x \in X$ fixado denote por $\phi_x : G \to X$ a aplicação $\phi_x(g) = gx$. Da mesma forma, para $g \in G$, seja $\phi_g : X \to X$ dada por $\phi_g(x) = gx$. Cada uma dessas aplicações são contínuas pois ϕ é contínua. Agora, $a(g) = \phi_g$, portanto é uma aplicação contínua. Além do mais, $a(g)^{-1} = a(g^{-1})$ e daí que as aplicações $g : X \to X$ são homeomorfismos de X.

A proposição a seguir aborda os grupos de isotropia das ações contínuas.

Proposição 2.20 *Suponha que a ação de G em X seja contínua e que X seja espaço de Hausdorff. Então um subgrupo de isotropia H_x, $x \in X$ é fechado.*

Demonstração: Em termos da aplicação ϕ, o subgrupo de isotropia é dado por

$$H_x = \{g \in G : \phi(g, x) = x\} = \phi_x^{-1}\{x\}.$$

Como X é Hausdorff, segue que H_x é fechado. □

O objetivo agora é olhar a bijeção da proposição 2.17 no caso de ações contínuas. Para isso é necessário introduzir uma topologia em G/H.

Definição 2.21 *Seja G um grupo topológico e H um subgrupo.* A topologia quociente *em G/H é definida através da aplicação quociente $\pi : G \to G/H$ por qualquer uma das seguintes maneiras:*

1. *um conjunto $A \subset G/H$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é aberto em G.*

2. *um conjunto $F \subset G/H$ é fechado se, e só se, $\pi^{-1}(A)$ é fechado em G.*

A topologia quociente é a menor topologia que torna a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ uma aplicação contínua. Quando G/H é munido da topologia quociente, $\pi : G \to G/H$ é uma aplicação aberta. De fato, para um subconjunto $A \subset G$ vale

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = AH.$$

Em particular, se A é aberto, AH é aberto em G e daí que $\pi(A)$ é aberto na topologia quociente. Ao contrário dos abertos, a projeção de um conjunto fechado não é, em geral, fechado.

A topologia quociente satisfaz a seguinte propriedade.

Proposição 2.22 *Seja Y um espaço topológico e $f : G/H \to Y$ uma função. Então, f é contínua em relação à topologia quociente se, e somente se, $f \circ \pi : G \to Y$ é contínua, onde $\pi : G \to G/H$ é a projeção canônica.*

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow & \searrow & \\ G/H & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Demonstração: Se f é contínua então $f \circ \pi$ é contínua, pois π é contínua. Reciprocamente, suponha que $f \circ \pi$ é contínua e seja $A \subset Y$ um aberto. Então $(f \circ \pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(f^{-1}(A))$ é um aberto em G. Pela definição da topologia quociente, segue que $f^{-1}(A)$ é contínua em G/H, concluindo a demonstração. $\square$

Proposição 2.23 *A ação de G em G/H é contínua em relação à topologia quociente.*

Demonstração: A aplicação $\phi : G \times G/H \to G/H$ que define a ação faz parte do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{p} & G \\ \text{id} \downarrow\downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ G \times G/H & \xrightarrow{\phi} & G/H \end{array}$$

Seja $A \subset G/H$ um aberto. Então, $p^{-1}\pi^{-1}(A)$ é aberto e daí que $(\text{id} \times \pi)^{-1}(A)$ é um aberto em $G \times G$. Mas, isso significa que $\phi^{-1}(A)$ é aberto em $G \times G/H$, pela definição da topologia quociente. □

Proposição 2.24 *Suponha que a ação de G em X é contínua e transitiva. Fixe $x \in X$ e considere a bijeção $\xi_x : G/H \to X$ dada por $\xi_x(gH_x) = gx$. Então, ξ_x é contínua em relação à topologia quociente em G/H*

Demonstração: Pela proposição anterior basta mostrar que $\xi_x \circ \pi$ é contínua. Agora, $\xi_x \circ \pi(g) = \xi_x(gH) = gx$, isto é, $\xi_x \circ \pi = \phi_x$ que é contínua se a ação é contínua. □

Em geral a aplicação ξ_x não é homeomorfismo, não sendo possível identificar as ações transitivas de G com seus quocientes. No entanto, isso será feito no contexto de grupos de Lie, aonde é possível, com o auxílio do cálculo diferencial, garantir que ξ é homeomorfismo. Por enquanto será mostrada a seguinte condição suficiente para que ξ seja homeomorfismo.

Proposição 2.25 *Suponha que exista $x_0 \in X$ tal que $\xi_{x_0}(U)$ é aberto para toda vizinhança U de 1. Então ξ_x é uma aplicação aberta para todo $x \in X$ e, portanto, é um homeomorfismo.*

Demonstração: Em primeiro lugar ξ_{x_0} é uma aplicação aberta. De fato, se $V \subset G$ é um aberto então $V = gU$ com $U \in \mathcal{V}$, $g \in G$. Mas, $\xi_{x_0}(gU) = (gU)x_0 = g(Ux_0)$ e $g(Ux_0)$ é aberto se Ux_0 o for, pois g é homeomorfismo. Agora, se $x = hx_0$ então $\xi_x(l) = lx = lhx_0 = \xi_{x_0} \circ D_h$. Portanto, se ξ_{x_0} é homeomorfismo, o mesmo ocorre com ξ_x. □

Antes de prosseguir, é conveniente fazer os seguintes comentários sobre a topologia quociente num produto cartesiano de grupos. Sejam G_1 e G_2 grupos topológicos e $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ subgrupos. O produto $H_1 \times H_2$ é um subgrupo de $G_1 \times G_2$ e o quociente $(G_1 \times G_2) / (H_1 \times H_2)$ se identifica com $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ através da bijeção

$$(g_1, g_2)(H_1 \times H_2) \longmapsto (g_1 H_1, g_2 H_2).$$

Essa bijeção é um homeomorfismo em relação às topologias quocientes nos espaços homogêneos. Isso pode ser visto facilmente pela definição de topologia quociente e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G_1 \times G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (G_1 \times G_2) / (H_1 \times H_2) & \longrightarrow & (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) \end{array}$$

Proposição 2.26 *A topologia quociente em G/H é de Hausdorff se, e somente se H é fechado.*

Demonstração: A aplicação $\pi : G \to G/H$ é contínua e $H = \pi^{-1}\{x\}$ se x denota a origem de G/H. Portanto, se G/H é Hausdorff, H é fechado.

Reciprocamente, suponha que H é fechado. A propriedade de Hausdorff é equivalente à diagonal

$$\Delta = \{(x, x) \in G/H \times G/H : x \in G/H\}$$

ser fechada em relação à topologia produto em $G/H \times G/H$, que coincide com a topologia quociente em $(G \times G) / (H \times H)$. Deve-se mostrar que $\pi_2^{-1}(\Delta)$ é um conjunto fechado em $G \times G$ onde $\pi_2 : G \times G \to H \times H$ é a projeção canônica. Mas, $\pi_2(g, h) \in \Delta$ se e só se $gH = hH$, isto é, se $h^{-1}g \in H$. Em outras palavras,

$$\pi_2^{-1}(\Delta) = \widehat{p}^{-1}(H)$$

onde $\widehat{p}$ é a aplicação contínua $\widehat{p}(x, y) = x^{-1}y$. Portanto, se H é fechado, $\pi_2^{-1}(\Delta)$ é fechado. □

A seguir será apresentado um critério para que um grupo topológico G seja compacto. Esse critério é frequentemente utilizado na teoria.

Teorema 2.27 *Suponha que H e G/H são compactos. Então, G é compacto.*

Demonstração: Para a demonstração será utilizada a propriedade de interseção finita, que caracteriza os espaços compactos: um espaço topológico K é compacto se, se só se, para uma família de fechados $\{F_i\}_{i\in I}$ vale $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ se ela satisfizer a propriedade de interseção finita, isto é, toda interseção de finitos elementos de $\{F_i\}_{i\in I}$ é não vazia.

Seja então $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família de fechados em G satisfazendo a propriedade da interseção finita. As projeções $\pi(F_i)$, $i \in I$, não são necessariamente conjuntos fechados em G/H, mas a família $\{\pi(F_i)\}_{i\in I}$ satisfaz a propriedade de interseção finita, já que

$$\pi(F_1 \cap \cdots \cap F_k) \subset \pi(F_1) \cap \cdots \cap \pi(F_k).$$

Portanto, os fechos $\{\mathrm{fe}\pi(F_i)\}_{i\in I}$ é uma família de fechados em G/H satisfazendo a propriedade da interseção finita. Como G/H é compacto, existe $g \in G$ tal que

$$gH \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{fe}\pi(F_i).$$

Isto é, $gH \in \mathrm{fe}\pi(F_i)$ para todo $i \in I$. Portanto, se $U \in \mathcal{V}$ então $\pi(Ug)$ é aberto que contém gH e $\pi(Ug) \cap \pi(F_i) \neq \emptyset$. Isso significa que $UgH \cap F_i \neq \emptyset$.

Agora será usada a compacidade de H para mostrar a existência de $h \in H$ tal que para toda vizinhança $U \in \mathcal{V}$, o aberto Ugh intercepta todos os fechados F_i. Considere a família de conjuntos $\{G_j\}_{j\in I\times\mathcal{V}}$ onde $G_j = U^{-1}F_i \cap gH$ se $j = (i, U)$. Essa família satisfaz a propriedade da interseção finita, pois

$$\left(U_1^{-1}F_1 \cap gH\right) \cap \cdots \cap \left(U_s^{-1}F_s \cap gH\right) = \left(U_1^{-1}F_1 \cap \cdots \cap U_s^{-1}F_s\right) \cap gH$$

e o segundo membro contém o conjunto

$$\left(\bigcap_{i=1}^{s} U_i\right) \cdot (F_1 \cap \cdots \cap F_s) \cap gH.$$

Mas, este conjunto é $\neq \emptyset$ pela escolha de gH, como classe lateral que está em todos os conjuntos $\mathrm{fe}\pi(F_i)$. Portanto, a família de fechados

$\{\text{fe}G_i\}_{i\in I}$ em gH satisfaz a propriedade de interseção finita. Como H é compacto, gH também é compacto, e daí que $\bigcap_{j\in I\times\mathcal{V}} G_j \neq \emptyset$. Isso significa que existe $h \in H$ tal que $gh \in G_i = U^{-1}F_i$ para todo $i \in I$ e todo $U \in \mathcal{V}$.

Agora, deve-se observar que se $gh \in U^{-1}F_i$ então $Ugh \cap F_i \neq \emptyset$. Como $U \in \mathcal{V}$ é arbitrário, $gh \in \text{fe}F_i = F_i$, concluindo a demonstração. □

Proposição 2.28 *Suponha que H e G/H são conexos. Então, G é conexo.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $A, B \subset G$ são abertos não vazios, disjuntos e tais que $A \cup B = G$. Então, $\pi(A)$ e $\pi(B)$ são abertos não vazios tais que $\pi(A) \cup \pi(B) = G/H$. Como G/H é conexo, $\pi(A) \cap \pi(B) \neq \emptyset$. Isso significa que existe uma classe lateral gH que intercepta ambos os conjuntos A e B. Então, $A \cap gH$ e $B \cap gH$ são abertos disjuntos, não vazios e tais que $\pi(A) \cup \pi(B) = gH$, contradizendo o fato de que H é conexo, já que gH é homeomorfo a H. □

Exemplos: 1

1. O grupo $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ age em $\mathbb{R}^n$ de maneira canônica: $\phi(g, x) = gx$, $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Essa ação é contínua pois ϕ é restrição de uma aplicação polinômial (de grau 2) $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Essa ação tem exatamente duas órbitas, a origem $\{0\}$ e o seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. É evidente que a origem é uma órbita. Para ver que o seu complementar também é uma órbita, tome $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Então existe uma matriz $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $ge_1 = x$. De fato, é possível estender x a uma base $\{x, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Denote por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então, g definida por $ge_1 = x$ e $ge_i = v_i$, $i = 2, \ldots, n$ é um elemento de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ que satisfaz o desejado.

   O subgrupo de isotropia em 0 é todo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Já o subgrupo de isotropia H_{e_1} em e_1 é formado pelas matrizes (em relação à base canônica) da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

com b uma matriz linha $1\times(n-1)$ e $C \in \mathrm{Gl}\,(n-1,\mathbb{R})$. Os grupos de isotropia em $x \neq 0$ são conjugados de H_{e_1}. Em todo caso, o quociente $\mathrm{Gl}\,(n,\mathbb{R})\,/H_{e_1}$ é homeomorfo ao cilindro $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A ação de canônica $\mathrm{Gl}\,(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ induz, por restrição, ações de seus subgrupos. Essas ações são todas contínuas, no entanto a estrutura das órbitas varia de acôrdo com o subgrupo. Eis alguns exemplos:

(a) Seja $\mathrm{O}\,(n) \subset \mathrm{Gl}\,(n,\mathbb{R})$. As órbitas são as esferas

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\},$$

$r \geq 0$. (A norma $|\cdot|$ utilizada aqui é a proveniente do produto interno canônico, lembrando que esse produto interno está implícito na definição de $\mathrm{O}\,(n)$.) O argumento para mostrar que as esferas são as órbitas é semelhante ao utilizado acima, estendendo vetores não nulos a bases, tomando o cuidado agora de escolher bases ortogonais. O subgrupo de isotropia em e_1 é formado pelas matrizes ortogonais que têm a forma de (2.1), isto é, pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com $C \in \mathrm{O}\,(n-1)$. Esse grupo é isomorfo a $\mathrm{O}\,(n-1)$. Portanto, o quociente $\mathrm{O}\,(n)\,/\mathrm{O}\,(n)$ é homeomorfo à esfera de dimensão $n-1$.

(b) O grupo $\mathrm{Sl}\,(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Gl}\,(n,\mathbb{R}) : \det g = 1\}$ age transitivamente em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, como pode ser verificado através do argumento de construção de bases. Assim, $\mathrm{Sl}\,(n,\mathbb{R})$ tem exatamente duas órbitas em sua ação canônica em $\mathbb{R}^n$.

2. Novamente, seja $G = \mathrm{Gl}\,(n,\mathbb{R})$ e seja $X = \mathbb{P}^{n-1}$ o espaço projetivo dos subespaços de dimensão um de $\mathbb{R}^n$. Se $V \in \mathbb{P}^{n-1}$ e $g \in$

$\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ $gV = \{gx : x \in V\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão 1, e daí que $gV \in \mathbb{P}^{n-1}$. A aplicação $V \mapsto gV$ define uma ação de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ ém $\mathbb{P}^{n-1}$. Esta ação é contínua em relação à seguinte topologia quociente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, denote por $[v]$ o subespaço gerado por v. Se $v \neq 0$, $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}$. Existe portanto uma aplicação sobrejetora $\pi : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto [v] \in \mathbb{P}^{n-1}$. Os abertos de $\mathbb{P}^{n-1}$ são os conjuntos $A \subset \mathbb{P}^{n-1}$ tais que $\pi^{-1}(A)$ é aberto. Com essa topologia a ação de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ é contínua. Essa ação é transitiva e a isotropia em $[e_1]$ é o subgrupo formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com $a \in \mathbb{R}$, b uma matriz linha $(n-1)\times(n-1)$ e $C \in \mathrm{Gl}(n-1,\mathbb{R})$. A projeção π é equivariante em relação às ações de G em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\mathbb{P}^{n-1}$. Como no caso da ação em $\mathbb{R}^n$, essa ação induz ações de todos os grupos lineares, isto é, dos subgrupos de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$. Essas ações são denominadas de *ações projetivas*.

3. Analogamente às ações projetivas, o grupo $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ age na Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$, formada pelos subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. A ação é dada por $(g,V) \mapsto gV$ onde gV é a imagem do subespaço V pela aplicação linear g. Essa ação de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ também é transitiva e é contínua em relação à seguinte topologia em $\mathrm{Gr}_k(n)$: denote por $B_k(n)$ o conjunto das matrizes $n \times k$ de posto k, munido da topologia induzida pela topologia do espaço vetorial de todas as matrizes $n \times k$. Existe uma aplicação sobrejetora $\pi : B_k(n) \to \mathrm{Gr}_k(n)$ que associa a uma matriz $p \in B_k(n)$ o espaço vetorial gerado pelas colunas de p. Então a topologia em $\mathrm{Gr}_k(n)$ é dada pelos conjuntos $A \subset \mathrm{Gr}_k(n)$ tais que $\pi^{-1}(A)$ é aberto em $B_k(n)$.

   Seja $V_0 \in \mathrm{Gr}_k(n)$ o subespaço gerado pelos primeiros k vetores da base canônica. Então o subgrupo de isotropia em V_0 é formado pelas matrizes do tipo

   $$\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

   com $P \in \mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})$ e $Q \in \mathrm{Gl}(n-k,\mathbb{R})$.

4. Seja Z um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ (ou numa variedade diferenciável) de classe $\mathcal{C}^1$ e suponha que Z seja completo, isto é, as soluções maximais de Z se estendem ao intervalo $(-\infty, +\infty)$. O fluxo de Z denotado Z_t, $t \in \mathbb{R}$, é definido a partir das trajetórias $t \mapsto Z_t(x)$ é a trajetória de Z que em $t = 0$ passa por x. O fluxo satisfaz as propriedades $Z_0(x) = x$ e $Z_{t+s}(x) = Z_t(Z_s(x))$. Portanto, $(t, x) \mapsto Z_t(x)$ define uma ação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ (ou na variedade diferenciável). Os teoremas de dependência de soluções em relação às condições iniciais garantem que essa ação é contínua. As órbitas dessa ação são as trajetórias do campo. Já os subgrupos de isotropia em x são descritos como: 1) $\mathbb{R}$ se x é uma singularidade do campo; 2) $\{0\}$ se a trajetória x não é uma curva fechada e 3) $\omega\mathbb{Z}$ se a trajetória que passa por x é periódica de período ω.

$\square$

2.5.3 Grupos quocientes

No caso em que $H \subset G$ é um subgrupo normal o quociente G/H tem uma estrutura de grupo, definida por $(gH)(hH) = (gh)H$. Com a topologia quociente esse grupo passa a ser um grupo topológico, como pode ser demonstrado da mesma forma que a proposição 2.23. A projeção $\pi : G \to G/H$ passa a ser um homomorfismo, necessariamente contínuo.