Diferencial da aplicação exponencial

A exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ no grupo de Lie G é uma aplicação diferenciável. Sua diferencial na origem $d(\exp)_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é a identidade de $\mathfrak{g} = T_1 G$. O fato de que $d(\exp)_0$ é isomorfismo implica que exp é um difeomorfismo local nas vizinhanças de 0, o que permite obter diversas relações entre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e o grupo G. Outras relações dessa natureza podem ser desenvolvidas através da expressão para a diferencial de exp em outros elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Dado $X \in \mathfrak{g}$ a diferencial $d(\exp)_X$ é uma aplicação linear entre $\mathfrak{g} = T_1 G$ e o espaço tangente $T_{\exp X} G$. Transladando à esquerda obtém-se a aplicação linear $T_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por

$$T_X = dE_{\exp(-X)} \circ d(\exp)_X \ . \tag{1}$$

Essa aplicação é dada por uma série de potências em $\mathrm{ad}(X)$.

Teorema 0.1 *Dado $X \in \mathfrak{g}$ seja T_X a translação à esquerda de $d(\exp)_X$, definida em (1). Então,*

$$T_X = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{ad}(X))^k . \tag{2}$$

Nesta expressão para T_X está pressuposto que a estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g} = T_1 G$ é dada pelo colchete entre campos invariantes à direita. Caso seja usado o colchete entre campos invariantes à esquerda, deve-se mudar o sinal de ad. Dessa forma, denote por $\mathrm{ad}_d(X)$ a adjunta obtida pelos campos invariantes e por ad_e a obtida pelos campos invariantes à esquerda. Então $\mathrm{ad}_e(X) = -\mathrm{ad}_d(X)$. Com essas notações a fórmula para a diferencial da exponencial é dada por

$$T_X = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} (\mathrm{ad}_d(X))^k = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (\mathrm{ad}_e(X))^k .$$

Essas séries podem ser escritas de forma mais concisa, levando em conta que a série de potências

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

na variável z representa a função (real ou complexa) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$. Portanto, $T_X = f(\mathrm{ad}(X))$, isto é,

$$T_X = \frac{e^{\mathrm{ad}_d(X)} - 1}{\mathrm{ad}_d(X)} = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_e(X)}}{\mathrm{ad}_e(X)}.$$

A demonstração do teorema 2 será feita em duas partes. Em primeiro lugar a fórmula para a diferencial da exponencial será deduzida para os grupos lineares, isto é, para os subgrupos de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Posteriormente, usando o teorema de Ado, que garante o isomorfismo local entre um grupo de Lie qualquer e um grupo linear, a fórmula será estendida aos grupos de Lie gerais.

Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $T_X(Y) = dE_{\exp(-X)} \cdot d(\exp)_X(Y)$ é a derivada

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(-X)\exp(X + tY)\right)_{|t=0} = \exp(-X)\frac{d}{dt}\left(\exp(X + tY)\right)_{|t=0}.$$

No caso de um grupo linear $\exp(X)$ é dado pela série de potências $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{k!} X^k$, o que possibilita calcular a derivada $\dfrac{d}{dt}\left(\exp(X + tY)\right)_{|t=0}$ explicitamente como uma série de potências em ad. A seguir essa derivada será calculada através de manipulações de séries. Essas manipulações envolvem a mudança de ordem e a associatividade de termos de séries de potências, que são justificadas pela convergência absoluta das séries envolvidas.

Pela convergência absoluta da série da exponencial, vale

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(X + tY)\right)_{|t=0} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\frac{d}{dt}(X + tY)^k_{|t=0}.$$

A derivada de um produto de matrizes fornece

$$\frac{d}{dt}(X + tY)^k_{|t=0} = \sum_{i=0}^{k-1} X^{k-i+1} Y X^i.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(X + tY)\right)_{|t=0} = \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k!} X^{k-i+1} Y X^i. \tag{3}$$

As parcelas dessa soma são reescritas através da seguinte fórmula de comutação, que é válida em uma álgebra associativa qualquer.

Lema 0.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e tome $x, y \in \mathcal{A}$.*

1. *Denotando $\mathrm{ad}_d(x)y = yx - xy$, tem-se, para todo $n \geq 1$, a fórmula de comutação à esquerda*

$$yx^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (\mathrm{ad}_d(x)^{n-p} y)$$

2. *A fórmula de comutação à esquerda é dada por*

$$x^n y = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p} y) x^p.$$

onde $\mathrm{ad}_e(x)y = xy - yx$ é a adjunta à esquerda.

Demonstração: Por indução. Para $n = 1$,

$$yx = xy + [x, y]_d$$

que é a igualdade do enunciado. Para $n + 1$,

$$\begin{array}{rcl} yx^{n+1} & = & (yx^n)x \\ & = & \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p+1} y) + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{p+1} (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p} y) \end{array}$$

pela hipótese de indução aplicada aos níveis n e 1. Substituindo-se p por $p + 1$ na segunda soma dessa igualdade, tem-se

$$\begin{array}{rcl} x^{n+1} y & = & \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p (\mathrm{ad}_e(x)^{n-p+1} y) + \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} x^p (\mathrm{ad}_e(x)^{n+1-p} y) \\ & = & \mathrm{ad}_e(x)^{n+1} y + x^{n+1} y + \sum_{p=1}^{n} \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right) x^p (\mathrm{ad}_e(x)^{n+1-p} y), \end{array}$$

que é a fórmula de comutação à direita. A fórmula de comutação à direita segue com o mesmo tipo de indução. □

Colocando a fórmula de comutação à direita (que envolve colchete de campos invariantes à direita entre campos lineares), na expressão (3), segue que $\frac{d}{dt} \left(\exp\left(X + tY \right) \right)_{|t=0}$ é dado por

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{k!} \binom{i}{j} X^{k-i-1} X^{i-j} \mathrm{ad}\left(X \right)^j \left(Y \right) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{k!} \binom{i}{j} X^{k-j-1} \mathrm{ad}\left(X \right)^j \left(Y \right).$$

A idéia agora é escrever essa soma como série de potências em $\operatorname{ad}(X)^j(Y)$. Para isso seus termos são reordenados da seguinte forma

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} = \sum_{k\geq 1}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=j}^{k-1} = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\cdot j+1}\sum_{i=j}^{k-1},$$

obtendo para a diferencial a expressão

$$\sum_{j\geq 1}\sum_{k\cdot j+1}\frac{1}{k!}X^{k-j-1}\operatorname{ad}(X)^j(Y)\left(\sum_{i=j}^{k-1}\binom{i}{j}\right). \tag{4}$$

A soma colocada entre parênteses é avaliada pelos seguinte lema sobre coeficientes binomiais.

Lema 0.3 $\sum_{i=j}^{k-1}\binom{i}{j} = \binom{k}{j+1}$.

Demonstração: Segue por indução a partir da igualdade

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}.$$

$\square$

Portanto, a expressão (4) para a derivada se reduz a

$$\sum_{j\geq 1}\sum_{k\cdot j+1}\frac{1}{k!}\binom{k}{j+1}X^{k-j-1}\operatorname{ad}(X)^j(Y) = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq\cdot j+1}\frac{1}{(j+1)!\,(k-j+1)!}X^{k-j-1}\operatorname{ad}(X)^j(Y).$$

Pondo $r = k-j+1$, chega-se finalmente a

$$\sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j+1)!}\left(\sum_{r\cdot\geq 0}\frac{1}{r!}X^r\right)\operatorname{ad}(X)^j(Y),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(X+tY)\right)_{|t=0} = e^X\sum_{j\geq 1}\frac{1}{(j+1)!}\operatorname{ad}(X)^j(Y).$$

Multilicando à esquerda por e^{-X} segue que

$$T_X = \sum_{j\geq 1} \frac{1}{(j+1)!} \mathrm{ad}\,(X)^j\,(Y)\,,$$

concluíndo a demonstração do teorema 2 para os grupos lineares.

O caso geral segue do teorema de representação de Ado e do seguinte lema.

Lema 0.4 *Sejam G e H dois grupos de Lie com mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de tal forma que exista um homomorfismo $\phi : G \to H$ com $d\phi_1 = \mathrm{id}$. Para $X \in \mathfrak{g}$ denote por $\exp_G X$ e $\exp_H X$ as exponenciais em G e H respectivamente. Defina $T_X^G = d\left(E_{\exp_G(-X)}\right)_{\exp_G X} \circ d\,(\exp)_X$. Definindo T_X^H da mesma forma, vale $T_X^G = T_X^H$.*

Demonstração: Como ϕ é homomorfismo, tem-se $\phi\,(\exp_G Y) = \exp_H Y$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, $\phi \circ \exp_G = \exp_H$. Aplicando a regra da cadeia, segue que

$$d\phi_{\exp_G X} \circ d\,(\exp_G)_X = d\,(\exp_H)_X\ .$$

Aplicando, nessa igualdade, a translação à esquerda $dE_{\exp_H(-X)}$, fica

$$d\left(E_{\exp_H(-X)}\right)_{\exp_H X} \circ d\phi_{\exp_G X} \circ d\,(\exp_G)_X = T_X^H. \tag{5}$$

Porém, $\phi \circ E_{\exp_G(-X)} = E_{\phi(\exp_G(-X))} \circ \phi = E_{\exp_H(-X)} \circ \phi$, pois ϕ é homomorfismo. Substituindo esta igualdade em (5), usando a regra da cadeia, chega-se a $d\phi_1 \circ T_X^G = T_X^H$. Portanto, $T_X^G = T_X^H$, já que $d\phi_1 = \mathrm{id}$. $\square$

Para concluir a demonstração do teorema 0.1 no caso geral, basta agora aplicar duas vezes o lema acima usando o teorema de Ado que garante que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma álgebra linear. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tomando uma representação fiel ρ de $\mathfrak{g}$ e o grupo conexo gerado por $\exp \rho\,(\mathfrak{g})$ chega-se a um grupo linear G_1 cuja álgebra de Lie é (isomorfa) a $\mathfrak{g}$. Por outro lado, seja $\widetilde{G}$ o recobrimento universal de G, que coincide com o recobrimento universal de G_1. Então, existem homomorfismos $\pi : \widetilde{G} \to G$ e $\pi_1 : \widetilde{G} \to G$, nas condições do lema acima. Usando a notação desse lema, conclui-se que $T_X^{\widetilde{G}} = T_X^G$ e $T_X^{\widetilde{G}} = T_X^{G_1}$. Portanto, $T_X^G = T_X^{G_1}$, mostrando que T_X^G é dado pela série do teorema 0.1.