Dinâmica Hiperbólica e Difeomorfismos de Anosov

Mayara Braz Antunes
Universidade Estadual de Campinas (Brasil)

mayara.b.antunes@gmail.com

Consideremos $f : M \to M$ é um difeomorfismo e M é uma variedade Riemanniana compacta. Apesar das duas primeiras propriedades valerem para um caso mais geral, para f contínua e M simplesmente um espaço topológico.

Propriedade 0.1 *O conjunto dos pontos não errantes $\Omega(f)$ é fechado e f-invariante ($f(\Omega(f)) = \Omega(f)$).*

Demonstração: Por simplicidade denotemos $\Omega(f) = \Omega$. Seja $x \in M \backslash \Omega$, então existe uma vizinhança U de x tal que para todo $n \geq 0$ tem-se $U \cap f^n U = \emptyset$. Note que $U \subset M \backslash \Omega$, dado $y \in U$ tome uma vizinhança de V de y pequena o suficiente de forma que esteja em U, assim $V \cap f^n(V) \subset U \cap f^n U = \emptyset$ para todo $n \geq 0$, o que significa que todo ponto de U não é um não errante. Portanto, Ω é fechado desde que é o complementar de um conjunto aberto.

Agora, seja $x \in \Omega$. Considere uma vizinhança V de $f^{-1}(x)$. Note que $f(U)$ é uma vizinhança de x, assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(f(U)) \cap f(U) \neq \emptyset$, o que implica que $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$ e portanto $f(x) \in \Omega$. Logo, $f^{-1}(\Omega) \subset \Omega$. Para ver que $f(\Omega) \subset \Omega$, fixe $x \in \Omega$ e seja V vizinhaça de $f(x)$, temos que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x, então existe $n_0 > 0$ tal que $f^{n_0}(f^{-1}(V)) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, isto é, $f^{n_0}(V) \cap V \neq \emptyset$. Logo, $f(x) \in \Omega$. □

Propriedade 0.2 *Se $p \in M$ é um ponto periódico de f então $p \in \Omega(f)$, isto é o conjunto dos pontos periódicos de f, $Per(f)$ está contido no conjunto dos pontos não errantes de f. Além disso, $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$.*

Demonstração: Seja p um ponto periódico de período m ($f^m(p) = p$). Dada uma vizinhança V de p, temos $p \in V \cap f^m(V)$. Portanto, $p \in \Omega$ (com $n_0 = m$). Como Ω é fechado (pela propriedade anterior), então $\overline{Per(f)} \subset \overline{\Omega} = \Omega$.

A partir de agora suponhamos que $f : M \to M$ é um difeomorfismo e M é uma variedade Riemanniana compacta.

Definição 0.3 *Um conjunto fechado $\Lambda \subset M$ invariante por f é dito* ***hiperbólico*** *se existe $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ e para todo $x \in \Lambda$ existem $E^s(x), E^u(x) \subset T_x M$ tais que*

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $\|df_x^n v^s\| \leq C\lambda \|v^s\|$, $\forall\ v^s \in E^s(x)$ *e* $n \geq 0$;
3. $\|df_x^{-n} v^u\| \leq C\lambda \|v^u\|$, $\forall\ v^u \in E^u(x)$ *e* $n \geq 0$;
4. $df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ *e* $df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

É possível mostrar usando os itens da definição acima que os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com relação a $x \in \Lambda$.

Se M é um conjunto hiperbólico, f leva um nome especial, dizemos que é um **difeomorfismo de Anosov**. Faremos agora um exemplo clássico de um difeomorfismo de Anosov.

Exemplo 0.4 *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *A aplicação $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $T_A([x]) = [Ax]$ é um difeomorfismo de Anosov.*

De fato: os autovalores de A são $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Logo, todo ponto de $\mathbb{T}^2$ é um ponto hiperbólico de T_A. O autoespaço gerado pelo autovetor correspondente ao autovalor λ_1 cuja norma *é mais que 1 será o E^u e o autoespaço gerado pelo autovetor correspondente ao autovalor λ_2 cuja norma é mais que 1 será o E^s.*

Note que se λ é autovalor de A e v é seu autovalor associado, então λ^n é autovalor de A^n e v é seu autovalor associado. Assim, se $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ é a aplicação de f no ponto x, então $Df^n v = A^n v$.

- *Para $v^s \in E^s$. Temos*
$$\|Df^n(v^s)\| = |\lambda_2^n| \|v\| < 2|\lambda_2|^n \|v^s\|.$$

- *Para $v^u \in E^u$. Temos*
$$\|Df^{-n}(v^u)\| = |\lambda_1^{-n}| \|v^u\| = |\lambda_1^{-1}|^n \|v^u\| = |\lambda_2|^n \|v^u\| < 2|\lambda_2|^n \|v^u\|,$$
pois $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}|$.

Tomando, $\lambda = |\lambda_2|$ e $C = 2$ na definição 0.3, temos que $\mathbb{T}^2$ é um conjunto hiperbólico.

Definição 0.5 *Dado um ponto hiperbólico $x \in M$ por um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe C^r definimos:*

- $W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^k x, f^k y) \to 0,\ k \to \infty\}$ *a* **variedade estável** *por x;*
- $W^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-k} x, f^{-k} y) \to 0,\ k \to \infty\}$ *a* **variedade instável** *por x.*

E dado $\varepsilon > 0$ denotamos por $W^s_\varepsilon(x)$ a variedade estável de x de raio ε, ou seja,

- $W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^k x, f^k y) \leq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}\}$

e por $W^u_\varepsilon(x)$ a variedade instável de x de raio ε, ou seja,

- $W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(f^{-k} x, f^{-k} y) \leq \varepsilon\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

Quando estamos trabalhando com difeomorfismos de Anosov, podemos em cada ponto de M definir as suas variedades instável e estável, obtendo folheações instável e estável de M que costuma-se denotar por $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$ respectivamente. Então entender a dinâmica em M, é estudar o que acontece nas folhas W^u e W^s, as quais podemos mostrar que variam continuamente com x e pela definição podemos dizer que f contrai folhas estáveis e expande folhas instáveis, devido a isso os difeomorfismos de Anosov viraram um interessante objeto de pesquisa entre matemáticos, até mesmo pelo desafio de desvendar as muitas perguntas em aberto que ainda existem.

A partir de agora, estaremos assumindo $f : M \to M$ difeomorfismo de Anosov e M variedade Riemanniana compacta e conexa.

Definição 0.6 *Dizemos que uma sequência $\{x_i\}$ em M é uma δ-**pseudo-órbita** para f se $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$. Um ponto $y \in M$ ε-**sombreia** a sequência $\{x_i\}$ se $d(f^i(y), x_i) \leq \varepsilon$.*

Lema 0.7 (Lema do sombreamento) *Para todo $\beta > 0$ existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=a}^b$ em Ω é β-sombreada por um ponto $x \in \Omega$.*

Demonstração: Dado $\beta > 0$.

Afirmação: Para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \Omega$ com $d(x, y) \leq \delta$ tem-se a interseção $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste de um único ponto e este ponto está em $\Omega(f)$.

Considere $\varepsilon > 0$ satisfazendo $\frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} + \frac{3\varepsilon}{2} < \beta$ e seja $\delta \in (0, \varepsilon)$ como na afirmação acima. Tome N tão grande de forma que $\lambda^N \varepsilon < \delta/2$ e então tome $\alpha > 0$ tal que:

- Se $\{y_i\}_{i=0}^N$ é uma α-pseudo-órbita em Ω, então $d(f^j y_0, y_j) < \delta/2,\ \forall\ j \in [0, N]$.

Considere uma α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ com $r > 0$. Defina x'_{rN} recursivamente para $k \in [0, r]$ por $x'_0 = x_0$ e $x_{(k+1)N} = W^u_\varepsilon(f^N x'_{kN}) \cap W^s_\varepsilon(x_{(k+1)N}) \in \Omega$.

Isto faz sentido, ou seja, $x'_{(k+1)N}$ existe para todo k:
$$d(f^N x'_{kN}, f^N x_{kN}) \leq \lambda^N d(x'_{kN}, x_{kN}) \leq \lambda^N \varepsilon < \delta/2$$
e

$$d(f^N x_{kN}, x_{(k+1)N}) < \delta/2 \text{ pela escolha de } \alpha,$$

então

$$d(f^N x_{kN}, x_{(k+1)N}) \leq d(f^N x'_{kN}, f^N x_{kN}) + d(f^N x_{kN}, x_{(k+1)N}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Agora, seja $x = f^{-rN} x'_{rN}$. Para $i \in [0, rN]$ tome s com $i \in [sN, (s+1)N]$ então

$$d(f^i x, f^{i-sN} x'_{sN}) \leq d(f^{i-rN} x'_{rN}, f^{i-(r-1)N} x'_{(r-1)N}) + d(f^{i-(r-1)N} x'_{(r-1)N}, f^{i-sN} x'_{sN})$$

$$\leq \cdots \leq \sum_{t=s+1}^{r} d(f^{i-tN} x'_{tN}, f^{i-tM+M} x'_{(t-1)N}) \leq \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon \lambda^{tN-i}$$

esta útima desigualdade segue de

$$\begin{aligned} d(f^{i-tN} x'_{tN}, f^{i-tN+N} x_{(t-1)N}) &= d(f^{i-tN} x'_{tN}, f^{i-tN}(f^N x_{(t-1)N})) \\ &\leq \lambda^{tN-i} d(x'_{tN}, f^N x'_{(t-1)N}) \leq \lambda^{tN-i} \varepsilon \end{aligned}$$

já que $x'_{tN} \in W^u_\varepsilon(f^N x'_{(t-1)N})$.

Pela escolha de α temos que $d(f^{i-sN} x_{sN}, x_i) < \delta/2$.

Usando várias vezes a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} d(f^i x, x_i) &\leq d(f^i x, f^{i-sN} x'_{sN}) + d(f^{i-sN} x'_{sN}, x_i) \\ &\leq d(f^i x, f^{i-sN} x'_{sN}) + d(f^{i-sN} x'_{sN}, f^{i-sN} x_{sN}) + d(x_i f^{i-sN} x_{sN}, x_i) \\ &\leq \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon \lambda^{tN-i} + \varepsilon + \delta/2 \leq \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} + \frac{3\varepsilon}{2} < \beta, \end{aligned}$$

isto é, x é um β-sombreamento de $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$.

Assim, toda α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ em Ω estende para $\{x_i\}_{i=0}^{rN}$ quando $rN \geq n$ fazendo $x_i = f^{i-n} x_n$ para $i \in (n, rN]$. Um $x \in \Omega$ sombreando esta extensão sombreia a pseudo órbita original.

Se $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ é uma α-pseudo órbita finita então também é $\{x_{j+a}\}_{j=0}^{b-a}$ e x sombreando esta, produz $f^{-a} x$ sombreando a original.

Portanto o lema vale para pseudo órbitas finitas. Se $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ é uma pseudo órbita em Ω, então encontra $x^{(m)} \in \Omega$ β-sombreando $\{x_i\}_{i=-m}^{m}$ e seja x um ponto limite da sequência $x^{(m)}$. Então $x \in \Omega$ β-sombreia $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$. □

Observação 0.8 *Dizemos que uma $f : M \to M$ é δ-expansiva se $x, y \in M$, $x \neq y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^N x, f^N y) > \delta$, δ assim sendo é chamado constante de expansividade da f. Pode-se mostrar que se f é Anosov, então f é δ_0-expansiva, para algum δ_0.*

Seja δ_0 a constante de expansividade da f.

Teorema 0.9 *Se $a = -\infty$, $b = \infty$ e $\beta < \delta/2$ então existe $\alpha > 0$ tal que o β-sombreamento da α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ é único.*

Demonstração: A existência de α é garantida pelo Lema do Sombreamento. Seja $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ uma α-pseudo órbita. Suponhamos que y, z são dois β-sombreamentos de $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, assim

$$d(f^i(y), f^i(z)) \leq d(f^i(y), x_i) + d(x_i, f^i(z)) < \beta + \beta = 2\beta < \delta_0, \ \forall i \in \mathbb{Z},$$

pela expansividade de f, $y = z$. □

Corolário 0.10 *Dado qualquer $\beta > 0$ com $\beta < \delta_0/2$ existe $\alpha > 0$ tal que a vale:*
se $x \in \Omega$ e $d(f^n x, x) < \alpha$ então existe um $x' \in \Omega$ com $f^n x' = x'$ e $d(f^k x, f^k x') \leq \beta$, $\forall\, k \in [0, n]$.

Demonstração: Seja $x_i = f^k x,\ i \equiv k \ (mod\ n),\ k \in (0, n]$. Então $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ é uma α-pseudo órbita. Seja $x' \in \Omega$ seu β-sombreamento. Então $d(f^i x', f^i f^n x') \leq d(f^i x', x_i) + d(x_i, f^{i+n} x') \leq 2\beta < \delta_0$ e pela expansividade $f^n x' = x'$. □

Lema 0.11 (Lambda Lema) *Seja $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico para f. Se D é um disco transversal a variedade estável, $W^s(p)$, em uma ponto $q \in W^s(p)$, então dado R e ε reais positivos existe N_0 tal que $\forall\ n \geq N_0$ a componente conexa de $f^n(D) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(W^u_R(p))$ que contém $f^n(p)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de $W^u_R(p)$. Onde $W^u_R(p)$ é a variedade instável de p de raio R e $\mathcal{V}_\varepsilon(W^u_R(p))$ é uma vizinhança de distância ε de $W^u_R(p)$.*

Teorema 0.12 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Então são equivalentes:*

1. *$\Omega(f) = M$;*
2. *$\overline{Per(f)} = M$;*
3. *$\mathcal{F}^u$ é minimal, isto é, a variedade instável de todo ponto é densa em M;*
4. *$\mathcal{F}^s$ é minimal, isto é, a variedade estável de todo ponto é densa em M;*
5. *f é transitiva;*
6. *f é topologicamente mixing.*

Demonstração:

$1 \Longrightarrow 2$: Seja $x \in M = \Omega(f)$. Dado $\varepsilon_0 > 0$ queremos encontrar um ponto periódico ε_0 próximo de x. Do Lema do sombreamento, tome $\beta = \varepsilon_0/2$, existe portanto o α. Considere a bola B de raio $r < \min\{\beta, \alpha/2\}$ centrada em x. Como x é não errante, existem $y \in B$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \in B$. Completamos esta sequência para obter a seguinte α-pseudo órbita periódica:

$$\{\ldots, f^{k-1}(y), y, f(y), f^2(y), \ldots, f^{k-1}(y), y, \ldots\}$$

e pelo Corolário do Lema do sombreamento existe $y_0 \in \Omega$ que β-sombreia e é periódico. Das escolhas feitas, segue que

$$d(y_0, x) < d(y_0, y) + d(y, x) < \beta + r < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0.$$

$2 \Longrightarrow 1$: $M = \overline{Per(f)} \subset \Omega \Longrightarrow M = \Omega$.

$2 \Longrightarrow 3, 4$: Pela hipótese, temos $\overline{Per(f)} = M$. Seja p um ponto periódico de f e considere o conjunto $\mathcal{A}_p = \{x \in M \mid x$ ligado a p por finitos W^u e $W^s\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{A}_p$ é aberto e fechado e então podemos concluir que este conjunto é toda a variedade, já que M é conexa. Dado $x \in \mathcal{A}_p$ existem pontos periódicos $p_1, \ldots, p_k$ tal que ligamos x a p por W^s e W^u desses pontos.Temos duas situações:

- $W^s(x)$ intersecta transversalmente $W^u(p_1)$: pela continuidade das folhas instáveis, existe um $\delta > 0$ tal que para todo y δ-próximo de x, $W^s(y)$ intersecta transversalmente $W^u(p_1)$, e assim $\mathcal{A}_p$ é um conjunto aberto.
- $W^u(x)$ intersecta transversalmente $W^s(p_1)$: existe um $\delta > 0$ tal que para todo y δ-próximo de x, $W^u(y)$ intersecta transversalmente $W^s(p_1)$, e assim $\mathcal{A}_p$ é um conjunto aberto.

Agora, seja $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathcal{A}_p$. Seja x um ponto limite desta sequência, então as variedades instáveis dos $x_n's$ estão convergindo para a variedade instável de x. Como os pontos periódicos são densos em M, existe um p' periódico próximo de x, tal que a variedade instável de x intersecta a variedade estável de p', e assim vai existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo x_n com $n \geq n_0$, $W^u(x_n)$ também intersecta $W^s(p')$. Para algum $n_1 \geq n_0$ fixo, $W^u(x_1)$ intersecta $W^s(p')$ e $x_{n_1} \in \mathcal{A}_p$, basta fazer o caminho por $W^(p')$, $W^u(x_1)$ e seguir pelas variedades instáveis e estáveis que ligam x_{n_1} a p. Logo, $x \in \mathcal{A}_p$ e portanto $\mathcal{A}_p$ é um conjunto fechado.

Agora mostraremos que se q é um ponto periódico (digamos de período m, $f^m q = q$), então $W^u(q)$ é densa em M. Dado q ponto periódico de f de período m e dado $\mathcal{V}$ um aberto qualquer de M, queremos ver que $W^u(q)$ intersecta $\mathcal{V}$. Como os pontos periódicos são densos em M, existe $p \in \mathcal{V}$ periódico, digamos de período n. Sejam $x_1, \ldots, k_k$ pontos de ligação das variedades instáveis e variedades estáveis que ligam p a q. Pela densidade dos pontos periódicos, existem $p_1, \ldots, p^k$ pontos periódicos tais que p_i está tão próximo quanto eu queira de x_i e seja m_i o períodos de p_i, $i = 1, \ldots k$. Note que, p_i, p e q são pontos fixo de $g = f^{mm_1\cdots m_k n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Para $p \in \mathcal{V}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola de centro p e raio ε, $B_\varepsilon(p)$, está em $\mathcal{V}$. Considere a bola na variedade instável centrada em p_1 e raio r_1 $B^u_{r_1}(p_1)$ de tal forma que $B_\varepsilon(p) \cap W^u(p) \subset B^u_{r_1}(p_1)$, pelo λ-Lema para g, para r_1 existe δ_2 tal que ao iterarmos $W^u_{\delta_2}(p_2)$ fica próxima a $W^u_{r_1}(p_1)$ e consequentemente próxima a $W^u_\varepsilon(p)$. Agora para δ_2 seja $r_3 > 0$ de tal forma que a bola $B^u_{\delta_2}(p_2)$ esteja contida $B^u_{r_3}(p_3)$, pelo λ-Lema, vai existir δ_4 tal que ao iterarmos $W^u_{\delta_4}(p_4)$ fica próxima a $W^u_{r_3}(p_3)$ e consequentemente próxima a $W^u_{\delta_2}(p_2)$ e mais ainda, próxima a $W^u_\varepsilon(p)$ intersectando assim a bola $B_\varepsilon(p)$. Fazendo isto recursivamente (basta um número finito), obtemos que a variedade instável de q intersecta $B_\varepsilon(p)$ e consequentemente intersecta $\mathcal{V}$. Assim, obtemos que as folhas instáveis de pontos periódicos são densas.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos mostrar que as variedades estáveis de pontos periódicos são densas, mas agora ao invés de olharmos para f, estaremos olhando para f^{-1}, já que para $x \in M$ $W^s_f(x) = W^u_{f^{-1}}(x)$.

Para provar que um ponto qualquer de M tem folheações instáveis densas, vamos provar a seguinte afirmação:

- Dado $\varepsilon_0 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in M$, $f^n(W^u(x))$ é ε_0-denso para $n \geq n_0$.

De fato: Sejam $p_1, \ldots, p_l$ pontos periódicos ε_0 densos em M. Fixe $x \in M$. Como as variedades estáveis de pontos periódicos são densas em M a variedade instável de x intersecta as variedades estáveis dos p_i's. Usando o λ-Lema para $f^{m_1 \cdots m_l}$, iterando a variedade instável de x conseguimos n_x tal que $f^{n_x} W^u(x)$ está ε_0 próxima das variedades instáveis dos p_i's, isto é, $f^{n_x}(W^u(x)) \cap B(p_i, \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo i. Então vai existir $L_x > 0$ grande tal que $f^{n_x}(W^u_L(x))$ intersecta as ε_0-bolas centradas em p_i, $i = 1, \ldots, k$ e pela continuidade das folhas, existe um $\delta_x > 0$ pequeno tal que se $y \in M$ está δ_x próximo de x então $f^{n_x}(W^u_L(y)) \cap B(p_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ para todo i. Fazendo isto para cada x, obtemos $\{B(x, \delta_x)\}$ uma cobertura aberta de M, como M é compacta, existem $x_1, \ldots, x_k$, tais que $M = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta_{x_i})$. Tomando $N = max\{n_{x_1}, \ldots n_{x_k}\}$ e $L = max\{L_{x_1}, \ldots L_{x_k}\}$, obtemos que para qualquer $z \in M$, $f^N(W^u_L(z))$ é ε_0-denso em M.

Note que $f^N(W^u(x)) = W^u(f^N(x))$, assim, para qualquer $x \in M$ sua variedade instável é densa em M.

Podemos mostrar de maneira análoga que para qualquer ponto tem variedade estável densa.

$3 \Longrightarrow 6$: Dados U e V abertos, seja $\varepsilon > 0$ tal que V contenha uma bola de raio ε.

Afirmação: Para este ε, existe $L > 0$ grande tal que $W^u_L(x)$ é denso para todo $x \in M$.

De fato: Fixado $\varepsilon > 0$. Seja $x \in M$, como $W^u(x)$ é denso em M, existe L_x grande o suficiente de tal forma que $W^u_{L_x}(x)$ é $\varepsilon/2$- denso, pela continuidade das variedades instáveis, existe $\delta_x > 0$ tal que para todo y δ_x próximo de x, $W^u_{L_x}(y)$ é ε-denso. Assim, obtemos $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in M}$ uma cobertura aberta de M, pela compacidade de M, existem $x_1, \ldots, x_j \in M$ tais que $M = \bigcup_{i=1}^j B(x_i, \delta_{x_i})$. Tomando $L = max\{L_{x_1}, \ldots L_{x_j}\}$ obtemos que para qualquer $z \in M$, $W^u_L(z)$ é ε-denso em M.

Esta afirmação, nos garante que tomando um segmento de variedade instável dentro de U e iterando pela f até que tenha comprimento maior que L, ele deverá necessariamente intersectar V. Logo, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq\neq \emptyset$.

Analogamente $4 \Longrightarrow 6$.

É claro que $6 \Longrightarrow 5$.

$5 \Longrightarrow 2$: Seja $x \in M$, dado U vizinhança de x, tome $V = U$, como f é transitiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$, isto significa que $x \in \Omega(f)$. Portanto, $M = \Omega(f)$.

Desta forma, provamos $1 \Longleftrightarrow 2 \Longrightarrow 3, 4 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 1$, ou seja, temos a equivalência das afirmações. $\square$

Teorema 0.13 *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Então existe vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que para $g \in \mathcal{V}_f$ existe um homeomorfismo $h : M \to M$ que satisfaz, $h \circ f = g \circ h$.*

Demonstração: Tome $\varepsilon < \delta_0/3$, onde δ_0 é a constante de expansividade de f. Para este ε seja δ dado pelo Lema do sombreamento. Com isso considere uma δ-vizinhança, $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1. Isto quer dizer que se $g \in \mathcal{V}_f$, então para $x \in M$ temos que $\{f^n(x)\}$ é uma δ-pseudo órbita para g:

$$d(g(f^{n-1}(x)), f^n(x)) = d(g(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(x))) < \delta.$$

Definimos a função

$$\begin{array}{rcl} h : M & \to & M \\ x & \mapsto & h(x) \end{array}$$

onde $h(x)$ é um ponto que ε-sombreia $\{f^n(x)\}$. Podemos definir a inversa h^{-1} analogamente a definição de h. Provaremos que h^{-1} é contínua, o que implica que h é homeomorfismo,dado que uma bijeção contiínua em um compacto é um homeomorfismo.

Dado $\widetilde{\varepsilon} > 0$, seja N tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta_0,\ \forall |n| \leq N$ então $d(x, y) < \widetilde{\varepsilon}$ (este N existe pela expansividade da f). Tome $\widetilde{\delta}$ tal que se $d(x, y) < \widetilde{\delta}$, então $d(g^n(x), g^n(y)) < \delta_0/3$ para $|n| < N$. Seja $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$

$$\begin{array}{rcl} d(f^n(h^{-1}(x)), f^n(h^{-1}(y))) & \leq & d(f^n(h^{-1}(x)), g^n(x)) + d(g^n(x), g^n(y)) + d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y)) \\ & < & \varepsilon + \delta_0/3 + \varepsilon < \delta_0/3 + \delta_0/3 + \delta_0/3 \\ & = & \delta_0 \end{array}$$

usamos que $d(g^n(x), f^n(h^{-1}(x))$ e $d(g^n(y), f^n(h^{-1}(y))$ são menores que $\delta_0/3$, pois como definimos acima $h^{-1}(x)$ ε-sombreia $\{g^n(x)\}$ por f. Portanto $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \tilde{\varepsilon}$.

Logo, h é um homeomorfismo. Por fim note que h é a conjugação entre f e g. □

Definição 0.14 *Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é* ***robustamente transitivo*** *se f é transitiva e existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que para toda $g \in \mathcal{V}_f$ é transitiva.*

Corolário 0.15 *Se f é Anosov transitiva, então f é robustamente transitiva.*

Demonstração: Pelo Teorema 0.13 em uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f para toda $g \in \mathcal{V}_f$ existe a conjugação $h : M \to M$. Como f é transitiva, então por 0.12 $\overline{Per(f)} = M$ então pela conjugação, dado qualquer aberto existe um ponto periódico de g neste conjunto. Implicando $\overline{Per(g)} = M$ e novamente por 0.12 g é transitiva. □

Referências

1. Robert Edward Rufus Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, University of California at Berkeley USA, (1947-1978).

2. Notas de aula do Régis: http://www.ime.unicamp.br/ regisvarao/out/din.hip.pdf.